МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2021

Вища математика: Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології» /КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,281 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 114 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 3 від 22.03.2021р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Укладачі: *Єрьоміна Тетяна Олександрівна*, канд. фіз-мат. наук, ст. викл.
Поварова Олена Андріївна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.*, д-р фіз-мат. наук, проф.

Рецензент *Симчук Я. В.*, канд. фіз.-тех. наук, доц., КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Посібник охоплює такі розділи вищої математики: елементи лінійної алгебри, елементи векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії.

Кожен розділ містить теоретичний матеріал з доведенням теорем і виведенням формул, наведено зразки розв’язання типових прикладів і прикладних задач.

Посібник розрахований на використання студентами перших курсів вищих навчальних закладів технічних спеціальностей, як стаціонарної так і заочної форм навчання.

Комп’ютерна графіка *Костюченко Ю. О.*

ПЕРЕДМОВА

Посібник з вищої математики для студентів технічних спеціальностей написаний враховуючи програму викладення матеріалу курсу «Вища математика» на технічних факультетах Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського».

Основним завданням даного видання є доступне та стисле подання теоретичного матеріалу та розв’язання спеціально підібраних прикладів і прикладних задач до таких розділів вищої математики: елементи лінійної алгебри, елементи векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії. Збірник містить 4 розділи, що поділені на параграфи, більшість з яких, для зручного використання, розділено на частини.

Після кожного викладення теоретичного матеріалу наведено ряд прикладів та типових задач з розв’язанням та детальним поясненням. Весь теоретичний і практичний матеріал, що потребує графічного пояснення містить графіки функцій і рисунки до задач з векторної алгебри, аналітичної геометрії та прикладних задач з фізики, зокрема, намальовані всі криві другого порядку з розділу аналітична геометрія. Що допоможе студентам більш глибоко зрозуміти теоретичний матеріал і набути практичного досвіду його застосування.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Однією з основних задач лінійної алгебри є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У зв'язку з цим виникли поняття визначника та матриці.

§1. Матриці. Визначники другого, третього порядків: означення, основні властивості

П.1. Основні поняття

Означення 1. ***Матрицею*** називається прямокутна таблиця чисел $a_{ij} \in R$, $i = 1,...,m \, (i = \overline{1,m})$, $j = \overline{1,n}$, що містить m рядків однакової довжини та n стовпців однакової довжини і записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \left\| \cdots \right\|, \quad A = \left[\cdots \right].$$

Скорочено матрицю записують $A = \left(a_{ij} \right), i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}$, де a_{ij} – <u>елементи</u> матриці, причому індекс i вказує на номер рядка, індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Це поняття з'явилося в середині XIX ст. в У. Гамільтона, А. Келі (Cayley Arthur, 1821-1895 рр., Англія) і Дж. Сільвестра (Sylvester J.J., 1814-1897 рр., Англія). Основи теорії матриць були створені К. Вейєрштрасом (Wierstras Karl, 1815-1897рр., Німеччина) і Г. Фробеніусом (Frobenius Georg, 1849-1917рр., Німеччина).

Позначають матриці великими латинськими літерами $A, B, C, D....$

Означення 2. Добуток $m \times n$ числа рядків m на число стовпців n називають ***розміром*** матриці, і записують $A_{m \times n}$.

Якщо $m = n$, то матриця називається ***квадратною***. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають ***матрицею n-го порядку***.

Квадратна матриця має головну та побічну діагоналі.

Означення 3. Елементи, що знаходяться на діагоналі, яка йде з лівого верхнього кута в правий нижній кут $\left(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right)$, утворюють ***головну діагональ*** матриці, а з лівого нижнього – у правий верхній кут $\left(a_{n1}, a_{(n-1)2}, \ldots, a_{1n}\right)$ – ***побічну діагональ***.

Для квадратних матриць існує поняття визначника матриці (детермінанта). Поняття «визначник » увів Лейбніц (лат. Determino - визначаю).

Якщо $n = 2$, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

якщо $n = 3$, то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Означення 4. ***Визначником 2-го порядку,*** що відповідає матриці другого порядку, називається число, яке обчислюється за правилом:

$$\Delta = \Delta(A) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Тобто, число, яке дорівнює різниці добутків елементів, що розташовані на головній та побічній діагоналях.

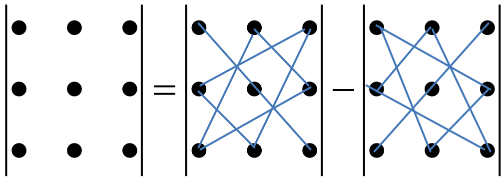
Означення 5. ***Визначником 3-го порядку,*** що відповідає матриці третього порядку, називається число, яке обчислюється за правилом (метод Саррюса):

$$\Delta = \Delta(A) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Існують такі правила обчислення визначників 3-го порядку:

- **правило трикутників:**



- **правило діагоналей:**

А) дописати знизу два перших рядки:

$$\begin{array}{ccc} \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \end{array}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

Б) дописати справа два перших стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Зауваження 1. Слід чітко відрізняти поняття матриці та визначника**:**

- матриця – <u>таблиця</u> чисел;
- визначник – <u>число</u>, обчислене за певним правилом .

П.2. Властивості визначників

Властивість 1. (Рівноправність рядків і стовпців) *Визначник не змінюється, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями. Таке перетворення називається* ***транспонуванням*** *визначника.*

На прикладі визначника 3-го порядку, властивість 1 має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\textit{транспонований визначник}} \Leftrightarrow \Delta = \Delta^T . \qquad (1)$$

Доведення цієї властивості виконаємо для визначника 2-го порядку. Для визначників інших порядків, доведення проводиться аналогічно. Обчислимо визначник 2-го порядку і транспонований визначник 2-го порядку:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \Delta^{\mathrm{T}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta = \Delta^{\mathrm{T}}.$$

Отже, рівність (1) виконується для визначника 2-го порядку.

Зауваження 2. Властивість 1 встановлює повну рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому, всі наступні властивості, які сформулюємо для рядків, будуть мати місце і для стовпців визначника.

Властивість 2. *При перестановці місцями двох будь-яких рядків, визначник змінює знак на протилежний.*

Розглянемо на прикладі визначника 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Обчислимо визначник 2-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Рівність (2) доведено.

Властивість 3. *Якщо визначник має два однакових рядки, то він дорівнює нулю.*

Розглянемо на прикладі визначника 3-го порядку, у якого перший та другий рядки однакові:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Доведення базується на основі властивості 2. Поміняємо місцями перший і другий рядки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{B.2}{=} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\Delta \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta = -\Delta \ \Rightarrow 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$ Тим самим, рівність (3) доведено.

Якщо у визначнику однаковими будуть інші рядки, доведення проводиться аналогічно.

Властивість 4. *Спільний множник, що міститься в усіх елементах будь-якого рядка, можна винести за знак визначника.*

Властивість 4 на прикладі визначник 2-го порядку, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad k = const. \tag{4}$$

Доведемо рівність (4). Обчислимо визначник вигляду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Отже, рівність (4) доведена.

Властивість 5. *Якщо будь-який з рядків визначника складається лише з нулів, то визначник дорівнює нулю.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення випливає з властивості 4, де $k = 0$.

Властивість 6. *Якщо елементи будь-яких двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Доведення випливає з властивості 4 та властивості 3.

Властивість 7. *Якщо всі елементи деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких елементи вказаного рядка складаються з перших доданків, а у другого – з других, решта елементів однакові.*

Тобто, якщо у визначнику 2-го порядку, наприклад, елементи другого рядка є сумою двох доданків, то виконується рівність:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Для доведення рівності (5) обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} - a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) +$$

$$+(a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Отже, рівність (5) виконується.

Властивість 8. *Визначник не зміниться , якщо до елементів деякого рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на деяке число.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Використовуючи властивості 7 та 6, легко переконатись, що рівність (6) виконується

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} \overset{Вл.7}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix}}_{=0,\ Вл.6} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Означення 6. ***Мінором*** M_{ij} елемента a_{ij} визначника $n-го$ порядку, називається визначник $(n-1)-го$ порядку, який утворюється з даного визначника при викресленні $i-го$ рядка та $j-го$ стовпця, на перетині яких розташований елемент a_{ij}.

Означення 7. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Розглянемо визначник 3-го порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і запишемо алгебраїчні доповнення до елементів першого рядка:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$$

Властивість 9. <u>Теорема Лапласа</u> (про розклад визначника за елементами рядка). *Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення.*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{7}$$

або

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad (7')$$

або

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \qquad (7'')$$

Доведемо рівність (7). За означенням визначника третього порядку:

$$\Delta = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{21}a_{32}a_{13} + \underline{\underline{a_{12}a_{23}a_{31}}} - a_{13}a_{22}a_{31} - \underline{a_{32}a_{23}a_{11}} - \underline{\underline{a_{21}a_{12}a_{33}}}$$

$$= \left| \begin{matrix} \textit{групуємо доданки,} \\ \textit{що містять елементи} \\ \textit{першого рядка} \end{matrix} \right|$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Отже, рівність (7) доведено. Аналогічно доводяться рівності (7′) та (7″).

Властивість 10. <u>Теорема 2</u> (про анулювання визначника). *Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.*

Застосовуючи властивість 10, до визначника 3-го порядку, отримаємо рівності:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0\ , \qquad (8)$$

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0\ , \qquad (8')$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0\ . \qquad (8'')$$

Для того, щоб довести рівність (8″), розкладемо всі алгебраїчні доповнення і зведемо подібні доданки:

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=a_{21}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{22}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{23}(-1)^{1+3}M_{13}=$$

$$=a_{21}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=\underline{a_{21}a_{22}a_{33}}-\underline{\underline{a_{21}a_{23}a_{32}}}-\underline{a_{22}a_{21}a_{33}}+a_{22}a_{23}a_{31}+\underline{\underline{a_{23}a_{21}a_{32}}}-a_{23}a_{22}a_{31}=0\,.$$

Отже, рівність (8″) виконується. Для доведення рівностей (8) та (8′) проводяться аналогічні дії.

§2. Визначники *n-го* порядку (n>3)

Теорема Лапласа про розклад визначника за елементами рядка дає змогу ввести поняття визначника *n-го* порядку.

Означення 1. ***Визначником (детермінантом) n-го порядку*** називається число, що дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка визначника на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta=\Delta(A)=\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+...+a_{1n}A_{1n}\overset{або}{=}$$

$$\overset{або}{=}a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+...+a_{2n}A_{2n}$$

Зауваження 1. Для визначників *n-го* порядку мають місце властивості 1-10 §1.

Обчислення визначника *n-го* порядку досить громіздкий процес: так для обчислення визначника 4-го порядку потрібно обчислити 4 визначники 3-го порядку; для обчислення визначника 5-го порядку потрібно обчислити 5 визначників 4-го порядку, або 20 визначників 3-го порядку, що не є раціональним.

Тому при обчисленні визначників *n-го* порядку використовують такі методи:

1. зведення визначника до трикутного вигляду;
2. виконати перетворення над елементами деякого рядка (стовпця) визначника так, щоб усі елементи крім одного дорівнювали нулю.

Приклад 1. Обчислимо визначник трикутного вигляду n-го порядку, розклавши його за елементами першого стовпчика:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{Cm.1}{=} a_{11}A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31} + ... + 0A_{n1} = a_{11}A_{11} =$$

Отримали визначник *(n-1)*-го порядку, розкладемо його за елементами першого стовпчика і т.д.

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{Cm.1}{=} a_{11}a_{22}A_{22} = ... = a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}\,.$$

Тобто, визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Приклад 2. Розглянемо визначник n-го порядку:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 5 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 4 & 5 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textit{додамо до ел}-\textit{ів} \\ 1-\textit{го стовпця елементи} \\ \textit{всіх інших стовпців} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4n+1 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 4n+1 & 5 & 4 & \cdots & 4 \\ 4n+1 & 4 & 5 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4n+1 & 4 & 4 & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4n+1 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 4n+1.$$

§ 3. Основні види матриць

Означення 1. Матриця, яка містить один рядок називається ***матриця-рядок (вектор-рядок)***:

$$A_{1\times n} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...a_{1n}).$$

Означення 2. Матриця, яка містить один стовпчик називається ***матриця-стовпчик (вектор-стовпчик)***:

$$B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Означення 3. Матриця розміру 1×1, яка містить одне число, ототожнюється з цим числом, тобто $A_{1\times 1} = (5) = 5$.

Означення 4. Дві матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називаються ***рівними***, якщо їх розміри рівні і відповідні елементи рівні: $a_{ij} = b_{ij}$.

Означення 5. ***Нульовою*** називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю і позначається:

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Означення 6. Квадратна матриця називається ***діагональною матрицею***, якщо всі її елементи, крім тих, що розташовані на головній діагоналі дорівнюють нулю.

$$D_{n\times n}=\begin{pmatrix}d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn}\end{pmatrix}.$$

Означення 7. Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається ***одиничною матрицею*** *і* позначається *E.*

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Означення 8. Квадратна матриця називається ***трикутною матрицею***, якщо всі елементи, що розташовані нижче (вище) головної діагоналі дорівнюють нулю.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}.$$

§ 4. Дії над матрицями та їх властивості

1. **Додавання матриць.** Дія додавання матриць вводиться тільки для матриць однакових розмірів.

Означення 1. ***Сумою двох матриць*** $A_{m\times n}=(a_{ij})$ і $B_{m\times n}=(b_{ij})$

називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})=A_{m\times n}+B_{m\times n}$, кожен елемент якої $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

2. **Множення матриці на число**.

Означення 2. ***Добутком матриці*** $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на число*** α називається матриця $B_{m\times n}=(b_{ij})=\alpha A_{m\times n}$, кожен елемент якої $b_{ij}=\alpha\,\alpha_{ij}$ дорівнює добутку відповідних елементів матриці $A_{m\times n}$ на число α.

3. **Віднімання матриць.** Різницю матриць $A-B$ можна визначити як $A-B=A+(-1)B$.

<u>**Властивості операцій додавання матриць та множення матриці на число**</u>

Операції додавання матриць і множення матриці на число називають ***лінійними операціями*** над матрицями і мають наступні властивості**:**

1) $A+B=B+A$ – комутативність відносно додавання матриць;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ – асоціативність відносно додавання матриць;

3) $A+O=A$– роль нульової матриці;

4) $A-A=O$– роль протилежної матриці;

5) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$– асоціативність відносно множення чисел;

6) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$– дистрибутивність числового множника відносно суми матриць;

7) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$– дистрибутивність матричного множника відносно суми чисел, де $A,\ B, C, O-$ матриці, $\alpha, \beta-$ числа.

4. Множення матриць. Операція множення двох матриць вводиться тільки для випадку, коли число стовпців першої матриці рівне числу рядків другої матриці. Такі матриці називаються ***узгодженими***.

Означення 3. ***Добутком матриці*** $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на матрицю*** $B_{n\times k}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times k}=(c_{ij})=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}$, елементи c_{ij} якої дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на елементи $j-$го стовпця матриці B: $c_{ij}=\sum\limits_{r=1}^{n}\alpha_{ir}b_{rj}$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$. Це правило називається множенням рядка на стовпець.

Приклад 1. Перемножити матриці AB і BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

1) Знайдемо AB:

$$A_{2\times2}B_{2\times3}=C_{2\times3}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1)\\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot2+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2) Знайдемо BA: добуток таких матриць $B_{2\times3}A_{2\times2}$ неможливий, оскільки матриці не узгоджені.

Зауваження 1. Операція множення матриць, у загальному випадку, не підлягає комутативній властивості: $AB\neq BA$.

Означення 5. Якщо ж $AB=BA$, то матриці A,B називаються ***комутативними***.

<u>Властивості дій 1-4 над матрицями</u> (за умови, що вказані операції мають зміст):

1) $(AB)C = A(BC)$ – асоціативна властивість множення матриць;

2) $A(B+C) = AB + AC$ – дистрибутивна властивість першого множника;

3) $(A+B)C = AC + BC$ – дистрибутивна властивість другого множника;

4) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ – асоціативність множення матриць щодо множення їх на число;

5) $A \cdot O = O \cdot A = O$ – роль(властивість) нульової матриці *O*;

6) $A \cdot E = E \cdot A = A$ – роль(властивість) одиничної матриці *E*.

Зауваження 2. У властивостях 5)-6) матриці *A*, *E*, *O* однакового порядку, а матриця A– квадратна матриця;

7) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, якщо A і B – квадратні матриці однакового порядку.

<u>Самостійна робота 1.</u> Перевірити властивість 7) для матриць *A* і *B*, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

План виконання самостійної роботи 1. Знайти:

1) AB

2) $\det(AB)$

3) $\det A$

4) $\det B$

5) $\det(AB)$

5. Піднесення матриці до степені. Під поняттям піднесення матриці до степені розуміють: $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ разів}$.

Зауваження 3. Операція піднесення матриці до степені має місце лише для квадратних матриць.

6. Транспонування матриць. ***Транспонуванням матриці*** називається заміна рядків на стовпці зі збереженням порядку їх слідування.

Властивості операції транспонування матриць

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$, 3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$,

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, 4) $(A^T)^T = A$.

Самостійна робота 2. Нехай A і B – квадратні матриці 2-го порядку вигляду (9). Перевірити властивості транспонування матриць 1) - 4).

§ 5. Обернена матриця

Нехай, A– квадратна матриця n-го порядку.

Означення 1. Квадратна матриця A^{-1} порядку n називається ***оберненою*** до матриці A, якщо виконується рівність: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Означення 2. Квадратна матриця A називається:

- ***виродженою,*** якщо $\det A = 0$,
- ***невиродженою,*** якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 1. (Необхідна і достатня умова існування оберненої матриці). *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

Доведення: **Необхідність**. Нехай існує обернена матриця A^{-1}. Доведемо, що $\det A \neq 0$:

- Згідно означення оберненої матриці: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$,
- За властивістю 7 про добуток визначників: $\det(A^{-1}A) = \det E$,

де $\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, отримуємо $\det A^{-1} \det A = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$.

Достатність. Нехай $\det A \neq 0$. Тоді, доведемо, що існує обернена матриця A^{-1} та виведемо формулу для її обчислення.

Розглянемо дві матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

Де $A^* -$ союзна (приєднана) матриця, транспонована матриця алгебраїчних доповнень A_{ij} елементів a_{ij} матриці *A*.

- Знайдемо добуток $A \cdot A^*$:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{matrix} \Bigg) = \begin{pmatrix} \mathrm{detA} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{detA} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{detA} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{detA} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{detA} \cdot E,$$

тобто $A \cdot A^* = \det A \cdot E$, де $\det A \neq 0$ згідно припущення.

- Аналогічно можна показати, що $A^* \cdot A = \det A \cdot E$, де $\det A \neq 0$.

- Перепишемо дві рівності у вигляді: $A\cdot\dfrac{A^*}{\det A}=E$ і $\dfrac{A^*}{\det A}\cdot A=E$ та порівняємо з означенням оберненої матриці $A^{-1}A=AA^{-1}=E$. Отримаємо, що $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det A}$, тобто $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, що в свою чергу вказує на існування оберненої матриці A^{-1}. Теорему доведено.

<u>Теорема 2.</u> (Єдиність оберненої матриці). *Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.*

Доведення виконаємо *від супротивного*. Припустимо, що існує ще одна обернена матриця A_1^{-1}, тобто $A_1^{-1}A=AA_1^{-1}=E$, тоді

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \textit{власт. множення} \\ \textit{матриць №6} \end{bmatrix}=A^{-1}\cdot E=A^{-1}\cdot\left(A\cdot A_1^{-1}\right)=[\textit{асоціат. вл.}]=(A^{-1}\cdot A)\cdot A_1^{-1}=$$

$$=E\cdot A_1^{-1}=A_1^{-1}\Rightarrow A^{-1}=A_1^{-1}.$$ Теорему доведено.

<u>Властивості оберненої матриці</u>

1) $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$;

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

3) $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$.

§ 6. Елементарні перетворення матриці. Ранг матриці

До елементарних перетворень матриці відносять:

1) перестановку місцями двох рядків (стовпців);

2) множення усіх елементів рядка (стовпця) матриці на число відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Означення 1. Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними*** $A \sim B$, якщо одна із них отримана з іншої за допомого елементарних перетворень.

В матриці $A_{m \times n}$ виберемо довільним чином k рядків, k стовпців, де $k \leq$

$\leq \min{(\mathrm{m}, \mathrm{n})}$.

Означення 2. ***Мінором*** $\boldsymbol{k} -$ го ***порядку*** матриці A називається визначник, складений з елементів матриці A, що знаходяться на перетині виділених рядків і стовпців.

Означення 3. ***Рангом*** матриці A називається найбільший порядок відмінного від нуля мінора матриці A і позначається $rang(A) = r(A)$.

Зауваження 1. З означення 3 виплаває, що $0 \leq r(A) \leq \min{(\mathrm{m}, \mathrm{n})}$.

Зауваження 2. $r(A) = 0$, тоді і лише тоді, коли $A = 0$ - нульова матриця.

Означення 4. Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається ***базисним мінором***. У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Властивості рангу матриці.

Ранг матриці не зміниться, якщо:

- матрицю транспонувати;
- викреслити нульовий рядок (стовпчик) матриці;
- при елементарних перетвореннях матриці.

Методи знаходження рангу матриці:

1. Метод обвідних мінорів. Нехай, в матриці знайдений мінор M $k -$ го порядку $\neq 0$. Наступним кроком розглянемо лише ті мінори $(k+1) -$ го порядку, які містять в собі (обводять) мінор M, якщо всі вони = 0, то

ранг матриці $= k$. В протилежному випадку серед обвідних мінорів знайдеться ненульовий мінор $(k+1)-$ го порядку і вся процедура повторюється.

Приклад 1. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти ранг матриці А методом обвідних мінорів.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

оскільки другий і третій рядки пропорційні

$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ та $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 0.$

Отже, $rang(\text{A}) = 2.$

2. Метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень, які не змінюють рангу матриці, матрицю зводять до трикутного (східчастого або трапецієподібного) вигляду. Кількість ненульових рядків вказує на ранг матриці.

Приклад 2. Знайти ранг матриці А з прикладу 1 методом елементарних перетворень.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim [IIIp = 3 \cdot IIp + IIIp] \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, оскільки маємо два ненульові рядки, $rang(\text{A}) = 2.$

3. Метод нулів та одиниць. За допомогою елементарних перетворень матрицю зводять до еквівалентної, яка складається з нульових рядків та стовпців, або з рядків та стовпців, в яких міститься лише одна одиниця, а решта елементів 0. Кількість одиниць в даній матриці дорівнює її рангу.

§ 7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення 1. ***Системою лінійних алгебраїчних рівнянь*** (СЛАР), що складається з m рівнянь і n невідомих називається система вигляду:

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots.. \\ a_mx_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{10}$$

де $a_{ij} = const,\ i = \overline{1,m}\,, j\ = \overline{1,n}$ називаються коефіцієнтами системи,

а $b_i = const\,, i = \overline{1,m}\ ,$ –вільними членами.

Матриця, складена з коефіцієнтів системи (10):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – називається основною матрицею системи.}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ – називається розширеною матрицею системи.}$$

Означення 2. Система рівнянь називається ***однорідною***, якщо всі вільні члени рівні нулю, тобто $b_1=b_2\ldots=b_m=0$.

Означення 3. Система рівнянь називається ***не однорідною***, якщо серед вільних членів є хоча б один $\neq 0$.

Означення 4. ***Розв'язком системи лінійних рівнянь*** називають впорядкований набір чисел $x_1=c_1$, $x_2=c_2,\ldots,x_n=c_n$ при підстановці яких у систему, перетворює її на тотожність.

Означення 5. Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Означення 6. Сумісна система рівнянь називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок і ***невизначеною***, якщо має більше ніж один розв'язок (зокрема безліч розв'язків).

§8. Розв'язування систем лінійних рівнянь

П.1. Формули Крамера.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{11}$$

де $a_{ij} = const, i = \overline{1,3}\,, j = \overline{1,3},\; b_i = const\,, i = \overline{1, m}\,.$

Запишемо систему (11) у матричному вигляді:

$$AX = B, \tag{12}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$

Розв'яжемо рівняння (12), помноживши зліва, ліву і праву частини рівняння на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B,\; EX = A^{-1}B,\; X = A^{-1}B,$

де $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$ A_{ij} $(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ – алгебраїчні доповнення до елементів матриці А.

Виконаємо дії:

$$A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3}{\Delta} \\ \frac{A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X.$$

Якщо визначники розкласти за елементами відповідних стовпців:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3,$$

то можна сформулювати таку теорему.

<u>Теорема 1</u>. *Якщо головний визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь $\Delta \neq 0$, то система сумісна та має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Зауваження 1. Якщо для системи (11) $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \neq 0$, то система несумісна (немає розв'язків).

Зауваження 2. Якщо для системи (11) $\Delta = 0$ і $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система невизначена (має безліч розв'язків).

П.2. Матричний метод. Записавши систему (11) в матричному вигляді:

$$AX = B, \tag{13}$$

де

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} -$ основна матриця системи,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} -$ матриця невідомих системи,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} -$ матриця з вільних членів системи.

Розв'язавши матричне рівняння (13), отримаємо розв'язок: $X = A^{-1}B$,

де $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$,

A_{ij} $(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ – алгебраїчні доповнення.

Висновок: щоб розв'язати СЛАР (11) матричним методом потрібно:

1) знати A^{-1} (при умові $\Delta_A \neq 0$),

2) домножити зліва A^{-1} на матрицю-стовпчик B (вільних членів), отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3}{\Delta} \\ \frac{A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язок СЛАР (11):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3}{\Delta}. \end{cases}$$

П.3. Метод Гаусса. Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (14)$$

1) СЛАР (14) шляхом елементарних перетворень, зведемо до трикутного або трапецієподібного вигляду. Під трикутним та трапецієподібним виглядом розуміють:

● трикутний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad +c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = \widetilde{b_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n-1r}x_r + \cdots + c_{m-1n}x_r = \widetilde{b_{n-1}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = \widetilde{b_n}; \end{cases} \qquad (15)$$

● трапецієподібний вигляд:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = \widetilde{b_2}, \\
\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = \widetilde{b_r}, \\
\qquad\qquad\qquad 0 = \widetilde{b_{r+1}}, \\
\qquad\qquad\qquad 0 = \widetilde{b_m}.
\end{cases} \tag{16}
$$

СЛАР (15) розв'язують методом виключення знизу вгору. Розглянемо детальніше знаходження розв'язків СЛАР (16), визначимо x_1, x_2, …, x_n. Нехай, система (16) має r рівнянь та n невідомих.

1) Якщо хоча б одне із значень $\widetilde{b_{r+1}}, \ldots, \widetilde{b_m} \neq 0,$ то система несумісна (не має розв'язків).

2) Якщо $\widetilde{b_{r+1}} = \cdots = \widetilde{b_m} = 0,$ то система має безліч розв'язків, отже, система сумісна але невизначена. Тоді, перших n невідомих називають основними (базисними), а решту $(n - r)$ невідомих – вільними (приймають довільні сталі значення). Базисні невідомі виражають через вільні невідомі.

Зауваження 1. Розв'язуючи СЛАР (14) методом Гаусса, до трикутного (трапецієподібного) вигляду для зручності приводять не систему рівнянь, а розширену матрицю системи.

Означення 1. ***Розширеною матрицею системи*** називають матрицю, утворену приєднанням до основної матриці стовпчика вільних членів.

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \;\; b_1 \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \;\; b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;\ldots \\ a_{m1}a_{m2} \cdots a_{mn} b_m \end{pmatrix}
$$

де A – основна матриця системи (14), $\bar{A}$ – розширена матриця системи (14).

Зауваження 2. Метод Гаусса менш громіздкий у обчисленнях, на відміну від матричного методу і формул Крамера та його можна застосовувати і тоді, коли головний визначник системи $= 0$.

§9. Теорема Кронекера – Капеллі (критерій сумісності СЛАР)

Розглянемо систему (14) m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Складемо основну і розширену матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Очевидно, що rangA $\leq$ rangĀ.

<u>Теорема Кронекера – Капеллі</u> (Про існування розв'язків СЛАР). *СЛАР (14) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, тобто* $rangA = rang\bar{A} = r$.

В залежності від значення r існує два випадки:

1) якщо $\mathrm{r} = n$, де n – число невідомих, то система має єдиний розв'язок.

2) якщо r < n, то система має безліч розв'язків.

§10. Системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь(СЛОАР)

Розглянемо систему 3-х лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Дослідимо розв'язки СЛОАР (17):

І. Якщо основний визначник системи Δ≠0, то система (17) має єдиний нульовий (тривіальний) розв'язок.

<u>Доведення:</u> Використаємо формули Крамера: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0,\ i = 1,2,3.$ Обчислимо визначники: Δ_i, $(i = 1,2,3)$. Використовуючи властивість 5 визначників, отримаємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Тоді згідно формул Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0, i = \overline{1,3};$$

тобто $x_1 = x_2 = x_3 = 0 -$ тривіальний розв’язок системи.

II. Якщо основний визначник системи Δ=0, то система (17) має безліч розв’язків (система невизначена).

Розглянемо такі випадки:

1) Припустимо, що визначник містить принаймні один ≠0, мінор 2-го порядку. Нехай, $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Запишемо рівняння системи, які складають ненульовий мінор:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3, \end{cases} \tag{18}$$

де x_1, x_2 – основні (базисні) змінні; x_3 – вільна змінна, позначимо $M_{33} = \tilde{\Delta}$. Обчислимо визначники отриманої системи: $\widetilde{\Delta_i}$, $(i = 1,2)$. Використовуючи властивості 4, 2 визначників, отримаємо:

$$\widetilde{\Delta_1} = \begin{vmatrix} -a_{13}x_3 & a_{12} \\ -a_{23}x_3 & a_{22} \end{vmatrix} = -x_3 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = x_3 \cdot \overline{\Delta_1},$$

$$\widetilde{\Delta_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}x_3 \\ a_{21} & -a_{23}x_3 \end{vmatrix} = -x_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -x_3 \cdot \overline{\Delta_2}.$$

Тоді за формулами Крамера розв’язки системи запишемо у вигляді:

$$x_1 = \frac{x_3 \cdot \overline{\Delta_1}}{\tilde{\Delta}};\ x_2 = \frac{-x_3 \cdot \overline{\Delta_2}}{\tilde{\Delta}}.$$

Оскільки x_3 вільна змінна, то нехай $x_3 = t \cdot \tilde{\Delta}$, де $t \in R$

$$\begin{cases} x_1 = t \cdot \overline{\Delta_1}, \\ x_2 = -t \cdot \overline{\Delta_2}, \\ x_3 = t \cdot \tilde{\Delta}; \end{cases} \tag{19}$$

де $t \in R$. Підставимо розв’язок (18) в третє рівняння системи (17)

$a_{31}t \cdot \overline{\Delta_1} - a_{32}t \cdot \overline{\Delta_2} + a_{33}t \cdot \widetilde{\Delta} = 0,$

$t\left(a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) = 0 \xRightarrow{\text{за вл.9}} t \cdot \Delta = 0,$

де Δ - основний визначник системи (17). Оскільки, за умовою $\Delta = 0$, то рівність $t \cdot \Delta = 0$ виконується для всіх $t \in R$. Тобто, система (17) має безліч розв'язків і формули (19) визначають їх множину для довільного $t \in R$.

2) Припустимо, що у Δ всі мінори 2-го порядку = 0. Отже, коефіцієнти усіх трьох рівнянь системи (17) пропорційні. Тому, система зводиться до першого рівняння з трьома невідомими:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0.$$

Нехай, x_1 – базисна змінна, x_2, x_3 – вільні змінні, позначимо:

$$x_2 = c_2;\ x_3 = c_3;\ \text{де } c_2, c_3 \in R.$$

Тоді розв'язок системи (17):

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}c_2 + a_{13}c_3), \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = c_3, \end{cases}$$

де $c_2, c_3 \in R$.

<u>**Висновок**</u>: Для однорідної системи m рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{20}$$

● якщо $n = r$, де $n -$ кількість невідомих, а r - ранг основної матриці системи (20), то система сумісна і нульовий розв'язок буде єдиним розв'язком системи (20);

● якщо $r < n$, то система (20) сумісна і має безліч нетривіальних розв'язків.

Означення. Якщо $r < n$, то довільна сукупність $(n - r)$ лінійно незалежних рядків системи (20) називається ***фундаментальною системою розв'язків.***

<u>Теорема</u>. *Загальний розв'язок однорідної системи m рівнянь з n невідомими, ранг якої r визначається:*

$$\vec{x} = c_1\overrightarrow{x_1} + c_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + c_{n-r} \cdot \overrightarrow{x_{n-r}},$$

де c_1, … c_{n-r} – деякі сталі, $\overrightarrow{x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_{n-r}}$ – фундаментальна система розв'язків (20).

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Вектори. Основні поняття

Означення 1. ***Скалярними величинами*** називають величини, які визначаються лише числовими значеннями (площа, об'єм, довжина, температура, робота і т. ін.).

Означення 2. ***Векторними величинами*** називають величини, які визначаються числовими значеннями і напрямом (швидкість, прискорення, сила і т. ін.). Векторні величини позначають векторами.

Означення 3. ***Вектором*** називають напрямлений відрізок і позначають: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$ де $A, C -$ початок відповідних векторів; B і $D -$ кінець. Вектор вважається заданим , якщо вказано його початок і кінець.

Означення 4. ***Довжиною (модулем)*** вектора $\vec{a}$ називають відстань між його початком і кінцем, і позначають:

$$|\vec{a}| \text{ або } |\overrightarrow{AB}| = AB.$$

Означення 5. ***Нульовим вектором*** називають вектор, у якого початок збігається з його кінцем і позначають $\vec{0}$. Довжина $|\vec{0}| = 0$, а напрям невизначений.

Означення 6. ***Одиничним*** називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Означення 7. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом самого вектора $\vec{a}$ називають ***ортом вектора*** і позначають $\vec{a}°$,

$$|\vec{a}°| = 1.$$

Означення 8. ***Колінеарними*** називаються вектори, які лежать на одній або паралельних прямих. Вони можуть бути *співнапрямлені* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ та *протилежно напрямлені* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Зауваження 1. Нульовий вектор є колінеарним до будь-якого вектора.

Означення 9. ***Компланарними*** називаються вектори, які лежать в одній або на паралельних площинах.

Означення 10. ***Рівними*** називаються вектори ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та мають однакову довжину.

Зауваження 2. Із означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно до самого себе, а початок вектора поміщувати у довільну точку простору.

Означення 11. ***Протилежними*** називаються два вектори, що мають однакову довжину але протилежний напрямок.

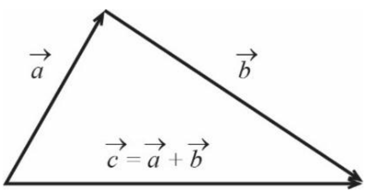
§2. Лінійні операції над векторами та їх властивості

До лінійних операцій над векторами належать:

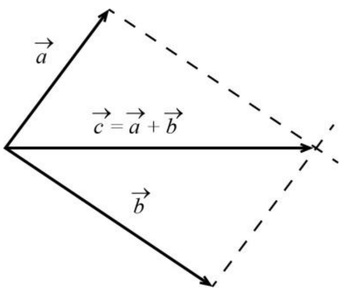
I. додавання векторів;
II. множення вектора на число;
III. віднімання векторів.

Розглянемо кожну операцію більш детально.

I. **Додавання векторів**. Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Сумістимо початок вектора $\vec{b}$ з кінцем вектора $\vec{a}$.

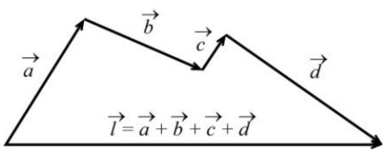


а) Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, що початок його суміщений з початком вектора $\vec{a}$, а кінець його співпадає з кінцем вектора $\vec{b}$ (правило трикутника).



б) Сумістимо початки двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, побудуємо на них паралелограм, так як показано на рисунку.

Сумою двох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, що виходить з початків векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і напрямлений по діагоналі одержаного паралелограма.



Сумою скінченного числа векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ називається вектор $\vec{e}$, що виходить з початку вектора $\vec{a}$ і напрямлений в кінець вектора $\vec{d}$.

II. **Добутком вектора $\vec{a}$ на число** $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R})$ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ такий, що $|\vec{b}| = \lambda \cdot |\vec{a}|$.

Зауваження 1. Вектор $\vec{a}$ буде *співнапрямленим* з вектором $\vec{b}$, якщо λ > 0 і позначається $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; вектор $\vec{a}$ буде *протилежнонапрямленим* з вектором $\vec{b}$, якщо $\lambda < 0$ і позначається $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Зауваження 2. Якщо $\lambda = 0,$ то $\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

<u>Геометричний зміст операції множення вектора на число</u>.

1) якщо λ > 1, то відбувається «розтяг» вектора $\vec{a}$.

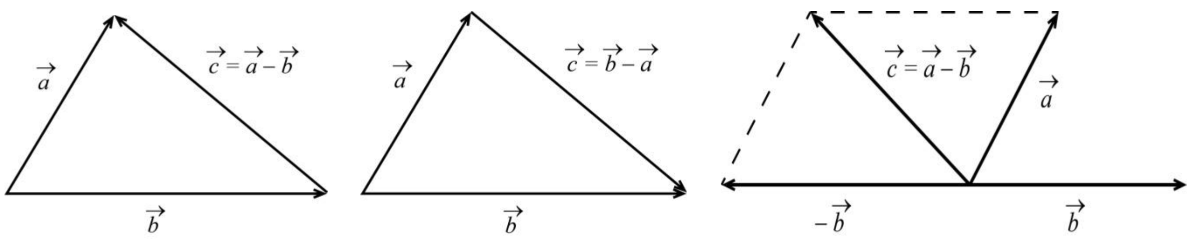
2) якщо 0 < λ < 1, то відбувається «стиск» вектора $\vec{a}$.

3) якщо λ < 0, то $\vec{a}$ змінює напрямок.

Кожен вектор можна представити як добуток його довжини на орт:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^{\circ} \Rightarrow \boxed{\vec{a}^{\circ} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

III. <u>Різницею векторів</u> $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



<u>Властивості лінійних операцій над векторами</u>

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність відносно суми векторів;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – асоціативність відносно суми векторів;

3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ – асоціативність відносно множення чисел;

4) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ – дистрибутивність відносно суми чисел;

5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ – дистрибутивність відносно суми векторів;

6) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ – роль нульового вектора;

7) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ – існування протилежного вектора $(-\vec{a})$;

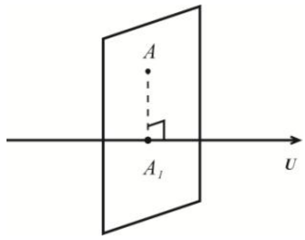
8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ – множення на одиницю.

Означення. Множина ненульових векторів, на якій введено лінійні операції над ними, що задовольняють властивості 1) – 8) називається ***лінійним векторним простором***.

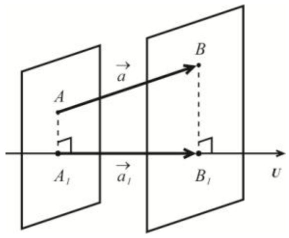
§3. Проекція вектора на вісь

Означення 1. ***Віссю*** називається напрямлена пряма.

Означення 2. ***Проекцією токи*** A ***на вісь U*** називається основа A_1 перпендикуляра, опущеного з точки A на дану вісь U. Таким чином, проекція A_1 є точкою перетину осі U з площиною, що проходить через точку A перпендикулярно до осі U.



Оскільки, у просторі задано вісь U та вектор $\overrightarrow{AB}$, то через точки A, B проведемо площини перпендикулярні до осі U. В результаті отримаємо проекції A_1 і B_1 точок і відповідно проекцію $\overrightarrow{A_1B_1}$ вектора $\overrightarrow{AB}$.



Означення 3. (Алгебраїчна інтерпретація проекції вектора на вісь). ***Проекцією вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на вісь U*** називається:

- додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо $\overrightarrow{AB}$ і вісь U однаково напрямлені; і
- від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо $\overrightarrow{AB}$ та вісь U протилежно напрямлені;

і позначається: $\text{проекція}_{\text{U}}\,\overrightarrow{AB}$ або $\text{пр}_U\overrightarrow{AB}$.

Означення 4. ***Кутом*** $\boldsymbol{\varphi}$ ***між вектором*** $\bar{\mathbf{a}}$ ***і віссю U*** (або між двома векторами) називають найменший з кутів, на який потрібно повернути вектор або вісь, щоб він за напрямом збігався з вектором, віссю. І позначають:

$$\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,U) = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{U}^{\circ}).$$

<u>Властивості проекцій вектора:</u>

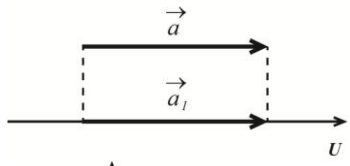
1) $\text{пр}_U\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$,

2) $\text{пр}_U\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \text{пр}_U\vec{a} + \text{пр}_U\vec{b} + \text{пр}_U\vec{c}$,

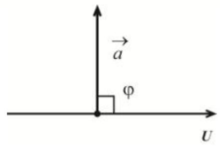
3) $\text{пр}_U(\alpha\vec{a}) = \alpha\,\text{пр}_U\vec{a}$.

<u>Доведемо</u> властивість 1):

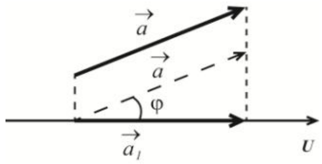
1. Припустимо φ=0°.
   Підставимо в властивість 1), отримаємо:
   $\text{пр}_U \vec{a} = |\overrightarrow{a_1}| = |\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = |\overrightarrow{a_1}|$.



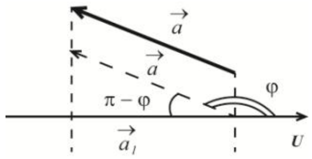
2. Нехай $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Підставимо в властивість 1), отримаємо: $\text{пр}_U \vec{a} = |\vec{a}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$.



3. Якщо $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$, тоді з малюнка видно, що
   $\text{пр}_U \vec{a} = |\overrightarrow{a_1}| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$



4. Якщо $\varphi > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{пр}_U \vec{a} = |\overrightarrow{a_1}| = -|\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$.



Отже, дійсно формула має місце. Аналогічно доводяться властивості 2) та 3).

Із властивостей 1)-3) випливає, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

§4. Лінійно незалежні системи векторів. Базис системи векторів.

Означення 1. ***Лінійною комбінацією n векторів*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, тобто вираз вигляду

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}.$$

Означення 2. Лінійна комбінація n векторів у якої $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ називається ***тривіальною (нульовою) лінійною комбінацією***.

Означення 3. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ називаються ***лінійно залежними***, якщо знайдуться такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, що їх лінійна комбінація дорівнює нулю:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}. \tag{1}$$

Означення 4. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ називаються ***лінійно незалежними***, якщо рівність (1) можлива лише у випадку, коли всі $\alpha_i = 0$ $i = \overline{1, n}$. Тобто

$$0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_n} = 0.$$

Властивості поняття лінійної залежності векторів:

1) якщо серед векторів $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ є нульовий вектор $\vec{0}$, то ці вектори лінійно залежні;

2) якщо вектори $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ лінійно залежні,то після додавання до них одного, чи кількох векторів отримаємо лінійно залежну систему векторів;

3) якщо $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ лінійно залежні, то після відкидання одного чи кількох векторів отримаємо лінійно незалежні вектори;

4) вектори $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших;

5) якщо 2 ненульові 3-вимірні вектори лінійно залежні, тоді вони колінеарні і навпаки;

6) якщо 3 ненульові 3-вимірні вектори лінійно залежні, тоді вони компланарні і навпаки;

7) 4 і більше тривимірних векторів завжди лінійно залежні.

Базис системи векторів

Означення 5. ***Базисом векторного простору R^n*** називають сукупність векторів $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}$, що задовольняють умови:

1) вектори $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}$ є лінійно незалежними;

2) $\forall\ \vec{x}\ \in R^n$ знайдуться такі дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що має місце рівність:

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n} \tag{2}$$

(2) – розклад вектора $\vec{x}$ у базисі $\{\overrightarrow{e_i}\}, i = \overline{1,n}$, числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають ***координатами вектора*** $\vec{x}$ у заданому базисі.

Означення 6. Вектори, які утворюють базис називають ***базисними***.

Число базисних векторів у векторному просторі вказує на його розмірність.

Означення 7. ***Базисом на прямій R^1*** називається довільний ненульовий вектор $\overrightarrow{e_1}$ такий, що для будь-якого вектора $\vec{a}\ \in R^1$ знайдеться така константа $a_1 \epsilon R$, що

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} \tag{3}$$

Означення 8. ***Базисом на площині R^2*** називається довільна пара неколінеарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, таких що для будь-якого вектора $\vec{a} \in R^2$, існують такі константи $a_1, a_2 \epsilon R$:

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} \tag{4}$$

Означення 9. ***Базисом в просторі R^3*** називається довільна трійка некомпланарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, таких що для будь-якого вектора $\vec{a} \in R^3$, існують такі константи $a_1, a_2, a_3 \epsilon R$:

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}. \tag{5}$$

Означення 10. Формули (3)-(5) ***називають розкладом вектора $\vec{a}$ у вибраному базисі,*** а числа a_1, a_2, a_3 – координатами вектора $\vec{a}$ у цьому базисі.

Отже, розкласти вектор за базисом, означає представити його як лінійну комбінацію базисних векторів.

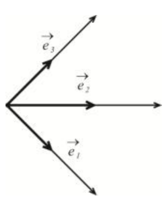
Означення 11. Якщо вектори базису взаємно перпендикулярні, то базис називається ***ортогональним***.

Означення 12. Якщо вектори базису взаємно перпендикулярні і одиничні, то базис називається ***ортонормованим***.

<u>Висновок:</u> вибір базису дає можливість вектору однозначно поставити у відповідність упорядкований набір чисел – координати вектора у заданому базисі.

§5. Декартова система координат. Прямокутна декартова система координат

<u>**Означення 1**</u>**.** Сукупність точки *O* і векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ простору R^3називається ***декартовою системою координат***.



1) точка *O* - *початок координат*;

2) Осі, що проходять в напрямку векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ називаються *осями координат.*

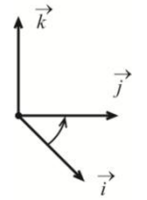
Декартових систем координат може бути багато. Серед них широко використовують прямокутну декартову систему координат.

Означення 2. ***Прямокутною декартовою системою координат*** називають сукупність точки *O* і ортонормованого базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

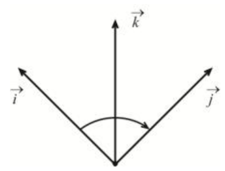
$$\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k}; \ |\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1.$$

Означення 3. Прямокутну декартову систему координат називають ***правою (лівою)***, якщо її ортонормований базис $\vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k}$ утворює праву (ліву) трійку векторів $\vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Означення 4. Трійку векторів $\vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k}$ називають правою (лівою), якщо з кінця третього вектора $\vec{k}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{\imath}$ до другого вектора $\vec{\jmath}$ здійснено проти (за) годинниковою стрілкою.



«права» трійка векторів $\vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k}$



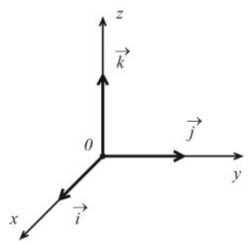
«ліва» трійка векторів $\vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k}$

Надалі користуємося правою прямокутною декартовою системою координат. Прямокутна декартова система координат позначається O_{xyz}; точка O - початок координат; O_x – вісь абсцис, O_y – вісь ординат, O_z – вісь аплікат. Координатні площини позначають: O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}, які розбивають простір на вісім октантів.

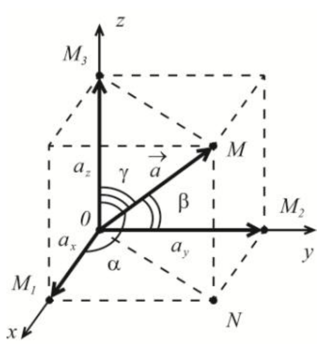
§6. Координати векторів і точок в прямокутній декартовій системі координат

1. Розклад вектора по ортам координатних осей.

Розглянемо в просторі прямокутну систему координат і позначимо на координатних осях O_x, O_y, O_z відповідні орти $\vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k}$. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ простору і помістимо його початок в точку О.



$$\vec{a} = \overrightarrow{OM}.$$



Знайдемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Для цього через кінець вектора $\vec{a}$ в точці M проведемо площини паралельні координатним площинам O_{xy}, O_{xz},

O_{yz} , які перетнуть координатні осі відповідно в точках M_1 , M_2 , M_3 . Довжини векторів $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$ називають проекціями вектора $\overrightarrow{a}$ на координатні осі і позначають:

$$|\overrightarrow{OM_1}| = \text{пр}_{ox}\,\vec{a} = a_x,$$

$$|\overrightarrow{OM_2}| = \text{пр}_{oy}\,\vec{a} = a_y,$$

$$|\overrightarrow{OM_3}| = \text{пр}_{oz}\,\vec{a} = a_z.$$

Згідно означення суми векторів: $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}$. Оскільки,

$$\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2},\ \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3}, \text{ то}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \qquad (6)$$

З іншого боку, довільний вектор можна представити як добуток його довжини на орт:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i} = a_x\vec{i}\,, \\ \overrightarrow{OM_2} &= |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j} = a_y\vec{j}, \\ \overrightarrow{OM_3} &= |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k} = a_z\vec{k}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Підставимо (7) в (6) та отримаємо

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (8)$$

(8) – розклад вектора $\vec{a}$ по ортам координатних осей (або за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Рівняння (8) має ще таку форму запису:

$$\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z).$$

Числа a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$, тобто координати вектора $\vec{a}$ - це його проекції на відповідні координатні осі.

2. Довжина (модуль) вектора.

Оскільки $\overrightarrow{OM}$ - діагональ прямокутного паралелепіпеда, то за теоремою про довжину діагоналей:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2$$

або

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \qquad (9)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

<u>3. Зв'язок між проекціями, координатами вектора та направляючі косинуси</u>.

Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, визначається кутами α, β, γ, які він утворює з відповідними координатними осями:

$$\alpha = (\widehat{\vec{a}, O_x}), \qquad \beta = (\widehat{\vec{a}, O_y}), \qquad \gamma = (\widehat{\vec{a}, O_z}).$$

Згідно властивостей проекції вектора на вісь:

$$\left.\begin{aligned} \left|\overrightarrow{OM_1}\right| &= \text{пр}_x\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = a_x \\ \left|\overrightarrow{OM_2}\right| &= \text{пр}_y\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\beta = a_y \\ \left|\overrightarrow{OM_3}\right| &= \text{пр}_z\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma = a_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad (10)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}}_{\text{направляючі косинуси вектора } \vec{a}}$$

Підставимо (10) в (9):

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma =$$

$$= |\vec{a}|^2\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \Rightarrow$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Тим самим, отримали основну властивість для направляючих косинусів.

<u>4. Орт вектора.</u> Кожен вектор можна представити як добуток його довжини на орт:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^\circ \Rightarrow \vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Координатна форма запису матиме наступний вигляд:

$$\vec{a}^{\circ} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$$

Тобто координати орта вектора є направляючими косинусами цього вектора.

5. Дії над векторами, що задані координатами у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Нехай, вектори $\vec{a}, \vec{b}$ задані своїми проекціями на координатні осі:

$\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$

або $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Оскільки, лінійним операціям над векторами відповідають лінійні операції над проекціями цих векторів, то:

1) $$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} = \\ = (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z),$$

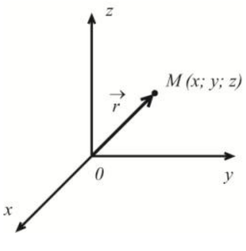
2) $$\vec{a} \cdot \lambda = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Крім того, $\vec{a} = \vec{b}$, коли відповідні координати рівні:

$$\begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

6. Координати точки. Радіус-вектор.

Нехай, в прямокутній декартовій системі координат задано точку $M(x;\ y;\ z)$.



Означення 1. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, що з'єднує початок координат з точкою M називається ***радіус-вектором точки*** M. Тобто, координати точки – це координати радіус-вектора.

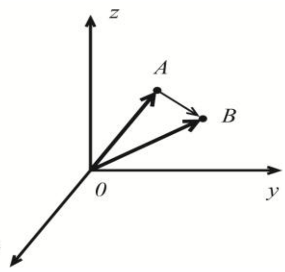
$$M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{r} = (x;\ y;\ z)$$

7. Координати вектора заданого двома точками.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо задано координати точок

А $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Побудуємо два радіус-вектора:



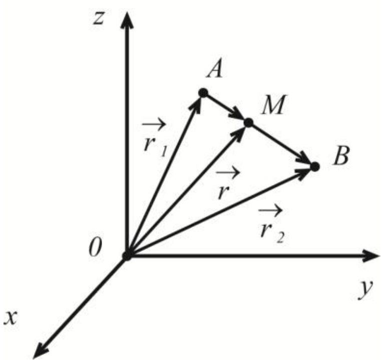
$$\overrightarrow{OA} = (x_1;\ y_1;\ \ z_1); \overrightarrow{OB} = (x_2;\ y_2;\ \ z_2).$$

Згідно різниці двох векторів:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| - \left|\overrightarrow{OA}\right| = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1).$$

§7. Поділ відрізка в заданому відношенні

Нехай, задано відрізок AB: A $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M(x;\ y;\ z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $\left|\overrightarrow{AM}\right| : \left|\overrightarrow{MB}\right| = \lambda$. Тоді радіус-вектори:



$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OA_1} = (x_1;\ y_1;\ z_1),$$

$$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OB_2} = (x_2;\ y_2;\ z_2),$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x;\ y;\ z).$$

Оскільки, $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{r_2} - \vec{r}$ і за умовою $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, то

$\vec{r} - \overrightarrow{r_1} = \lambda(\overrightarrow{r_2} - \vec{r})$, виділимо $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \frac{\overrightarrow{r_1} + \lambda\overrightarrow{r_2}}{1+\lambda}.$$

Прирівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, маємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{11}$$

При $\lambda = 1$ отримаємо координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}; \tag{12}$$

Координати центра мас системи матеріальних точок

$$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1),\ M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2), \dots, M_3\ (x_n;\ y_n;\ z_n),$$

в яких зосереджено маси $m_1, m_2, \dots,\ m_n$. Якщо центр мас лежить на відрізку $M_1\ M_2$ і ділить його у відношені:

$$\lambda_1 = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1M_2}\right|},$$

то за формулами (11):

$$x_{N_1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\ ;\ y_{N_1} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}\ ;\ z_{N_1} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}\ . \qquad (13)$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (13) називається центром мас двох матаріальних точок $M_1,\ M_2$. Розглянемо систему точок N_1 , в яких зосереджено маси $m_1 + m_2$ і m_3 і знайдемо центр маси $N_2\left(x_{N_2};\ y_{N_2};\ z_{N_2};\right)$ цих точок. Оскільки,

$$\lambda_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2} = \frac{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_2N_3}\right|}\ ,$$

то з формул (11) і (13) маємо:

$$x_{N_2} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$y_{N_2} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad (14)$$
$$z_{N_2} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (14) називається центром мас трьох матеріальних точок M_1, M_2, M_3.

Методом математичної індукції можна довести, що центр мас системи n матеріальних точок знаходиться в точці $C(x_c;\ y_c;\ z_c)$, де

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

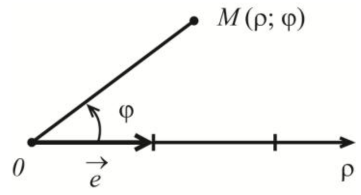
§8. Полярна система координат

Полярна система координат не єдиний спосіб визначити за допомогою чисел місце знаходження точки на площині. Існує багато інших координатних систем. Однією з найважливіших є полярна система координат, вона задається:

1) точкою O − полюс;

2) променем $O\rho$ − полярна вісь;

3) одиничним вектором $\vec{e}$, такого ж напрямку як полярна вісь.



Візьмемо на площині довільну т. M. Положення точки на площині у полярній системі координат визначається двома значеннями:

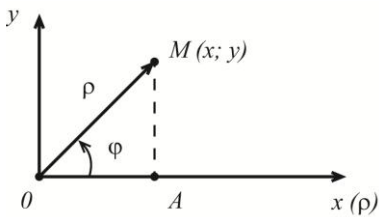
- відстанню $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ від полюса до точки M $(0 \le \rho < \infty)$;
- кутом $\varphi = \left(\widehat{O\rho; \overrightarrow{OM}}\right)$, на який потрібно повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$, де

$$\varphi \in (-\pi; \pi] \text{ або } [0; 2\pi).$$

Отже, точці M ставиться у відповідність пара чисел $(\rho; \varphi)$.

<u>Зв'язок між прямокутною декартовою системою координат та полярною системою координат.</u>

Помістимо полюс в початок декартової системи координат $0 \to 0xy$, а полярну вісь співнаправимо з віссю $0x$.



З трикутника OMA:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\varphi; \end{cases} \qquad (15)$$

(15) – формули переходу від полярної системи координат до прямокутної декартової системи координат. Для того, щоб отримати обернений перехід, в (15) піднесемо обидва рівняння до квадрату та додамо і розділимо друге рівняння на перше $tg\varphi = \frac{y}{x}$, отримаємо формули переходу від прямокутної декартової системи координат до полярної системи координат:

$$\begin{cases} \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x}, \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases} \qquad (16)$$

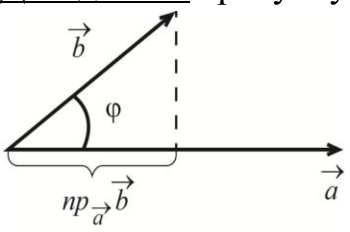
§9. Скалярний добуток векторів

Означення 1. ***Скалярним добутком*** двох ненульових векторів, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

<u>Геометричний зміст скалярного добутку:</u> Скалярний добуток двох векторів рівний добутку довжини першого вектора на проекцію на нього іншого вектора.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} \qquad (17)$$

<u>Доведення.</u> З рисунку видно, що:



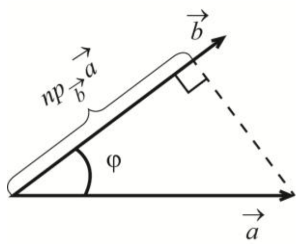
$$\frac{\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{b}|}=\cos\varphi,$$

тоді $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$.

І навпаки, з рівності

$$\frac{\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|}=\cos\varphi$$

випливає, що $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$.



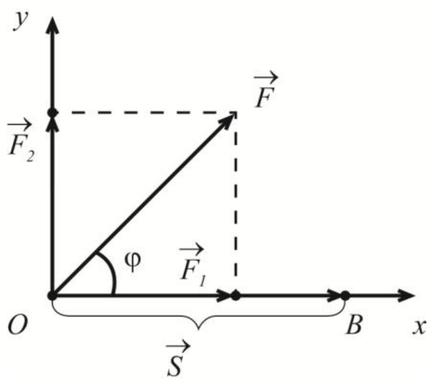
Отже, згідно означення скалярного добутку:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Доведено.

<u>Фізичний зміст скалярного добутку.</u>

Для визначення фізичного змісту скалярного добутку розглянемо зв'язок між роботою A, як скалярної величини, та векторами сили $\vec{F}$ і переміщення $\vec{S}$, яке здійснює точка прикладення сили $\vec{F}$.



Для зручності будемо розглядати прямолінійне переміщення точки під дією сталої за величиною та напрямом сили.

Нехай, під дією сили $\vec{F}$ точка

прикладення сили перемістилася з точки O в точку B, тоді $\vec{S}$ - вектор переміщення, а $\varphi -$ кут між вектором сили $\vec{F}$ та вектором переміщення $\vec{S}$.

Запишемо силу $\vec{F}$ через її складові по вісях Ox та Oy:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Як видно з рисунка, $\vec{F}_1 \parallel \vec{S}$ і $\vec{F}_2 \perp \vec{S}$.

Зрозуміло, що складова $\vec{F}_2$ не бере участі в переміщенні точки прикладення сили, тому робота A, згідно означення як фізичної величини,

$$A = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{S}|.$$

Перейдемо в записаній формулі від модуля складової $\vec{F}_1$ до модуля самої сили $\vec{F}$:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi.$$

Таким чином, робота A сили $\vec{F}$

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi,$$

що є модулем скалярного добутку сили $\vec{F}$ та вектора переміщення $\vec{S}$.

Отже, скалярний добуток вектора сили $\vec{F}$ та вектора переміщення $\vec{S}$ є роботою цієї сили по переміщенню точки прикладення:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *– коммутативна;*

2) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *– ассоціативна відносно числового множника;*

3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ *– дистрибутивна відносно суми векторів.*

Доведення.

1) За означенням $\left.\begin{array}{r}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\\ \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})\end{array}\right\}\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},$

оскільки

1) добуток двох чисел: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|$;
2) кут не змінюється: $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\cos(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$.

2) з формули (17) та за властивістю проекцій вектора 3) з §3 маємо:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=\lambda|\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

3) з формули (17) та за властивістю проекцій вектора 2) з §3 маємо:

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\cdot(\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}+\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c})=$$

$$=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}.$$

Доведено.

Геометричні властивості скалярного добутку.

1) Для того щоб два ненульові вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *були перпендикулярні необхідно і достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

2) Якщо два вектори колінеарні і співнапрямлені $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$*, то їх скалярний добуток дорівнює добутку їх модулів:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Якщо два вектори колінеарні але протилежно напрямлені $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$*, то їх скалярний добуток дорівнює від'ємному добутку їх модулів:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

3) Якщо кут між векторами гострий $0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$*, то скалярний добуток додатний* $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$.

Якщо кут між векторами тупий $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$*, то скалярний добуток від'ємний* $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

4) Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Доведення.

1) Необхідність.

Дано: $\vec{a}, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \perp \vec{b}$

Довести: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Оскільки, $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$

Достатність.

Дано: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

Довести: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

За означенням скалярного добутку

$$\left.\begin{array}{r}\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Rightarrow \varphi = 0° \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0° = |\vec{\bar{a}}| \cdot |\vec{b}|$.

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\pi = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

3) $$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) > 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \\ \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \Rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) < 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0. \end{array}\right.$$

4) $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}||\vec{a}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}\right) = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2$. Доведено.

Наведемо таблицю скалярних добутків ортів $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$$\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k}; |\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1.$$

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	1	0	0
$\vec{\jmath}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Координатна форма запису скалярного добутку.

Нехай задано два вектори: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Теорема. *Скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами в прямокутній декартовій системі координат дорівнює сумі добутків відповідних координат:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Доведення:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$

$= a_x b_x \vec{i}\,\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\vec{k} + a_x b_y \vec{i}\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\vec{k} + +a_y b_x \vec{j}\vec{i} + a_y b_z \vec{j}\vec{k} +$

$+a_z b_x \vec{k}\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\vec{j} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

Наслідок.

1) Якщо $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

2) Якщо $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $\vec{a} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}.$

3) Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, то

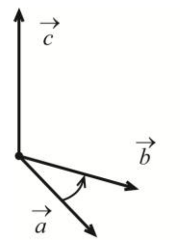
$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}.$$

§10. Векторний добуток векторів

Означення 1. ***Векторним добутком двох векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, що задовольняє умови:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$;

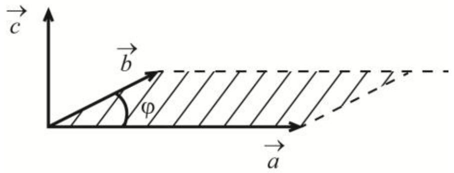
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, тобто вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, в якій розташовані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;



3) Трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – «права» трійка векторів.

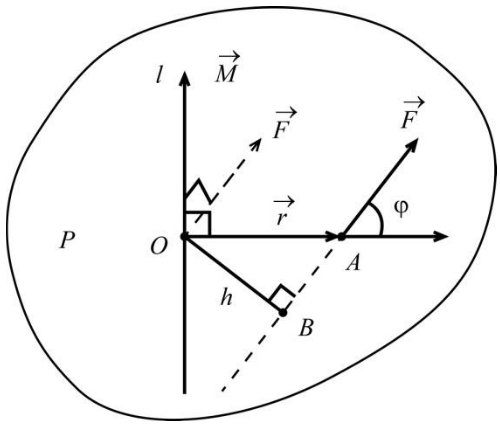
і позначається $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Геометричний зміст векторного добутку векторів:



Довжина векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма побудованого на цих векторах: $S_{\text{парал.}} = |\vec{a} \times \bar{b}|$.

Фізичний зміст векторного добутку векторів:



Розглянемо тверде тіло, яке може обертатися навколо вісі Ol під дією сили $\vec{F}$. Для спрощення будемо вважати, що сила $\vec{F}$ лежить в площині P, перпендикулярній до вісі Ol.

Проведемо з точки O до точки A прикладення сили $\vec{F}$ вектор $\vec{r}$, який має назву радіус – вектор, що лежить в тій же площині, що і вектор сили $\vec{F}$.

Як відомо, моментом сили відносно деякої вісі називається добуток модуля вектора сили $|\vec{F}|$ на її плече h, тобто на довжину перпендикуляра, опущеного з точки O, через яку проходить вісь, на напрям дії сили:

$$|\vec{M}| = |\vec{\mathrm{F}}| \cdot h$$

З ΔOAB знаходимо:

$$h = |\vec{r}| \cdot \sin\varphi.$$

Таким чином,

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\varphi,$$

що є модулем векторного добутку радіус – вектора $\vec{r}$ та сили $\vec{F}$.

Отже, моментом сили $\vec{F}$ відносно вісі, що проходить через точку O є вектор $\vec{M}$, який дорівнює векторному добутку радіус – вектора $\vec{r}$ та вектора сили $\vec{F}$ і спрямований вздовж вісі Ol за правилом правого буравчика, тобто

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Вектори $\vec{r}$, $\vec{F}$ і $\vec{M}$ утворюють праву трійку векторів.

Алгебраїчні властивості векторного добутку.

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ – антикомутативна властивість.

2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ – асоціативна відносно числового множника.

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ – дистрибутивна відносно суми векторів.

Геометричні властивості векторного добутку.

Теорема. *Два ненульові вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нуль-вектору.*

$$\vec{a} \parallel \vec{b}(\vec{a}, \vec{b} \neq 0) \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Доведення.

1) Необхідність.

Дано: $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Довести: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

З означення векторного добутку випливає

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$,

оскільки $\vec{a} \parallel \vec{b} => \varphi = 0° \Longrightarrow \sin 0° = 0°$, отже,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 0° = 0.$$

Достатність.

Дано: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$;
Довести: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

За означенням векторного добутку

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin \varphi = 0 \Longrightarrow$$

Оскільки, $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$, то

$$\left.\begin{matrix} |\vec{a}| \neq 0 \\ \left|\vec{b}\right| \neq 0 \end{matrix}\right] \Longrightarrow \sin \varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \Longrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Доведено.

<u>Наслідок:</u> Якщо вектор сам на себе перемножити векторно, отримаємо нульовий вектор: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Наведемо таблицю векторних добутків ортів $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k}$; $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = \left|\vec{k}\right| = 1$.

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{\jmath}$
$\vec{\jmath}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{\imath}$
$\vec{k}$	$\vec{\jmath}$	$-\vec{\imath}$	$\vec{0}$

<u>*Координатна форма запису векторного добутку*</u>

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами в прямокутній декартовій системі координат:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}.$$

<u>**Теорема 1**</u>**.** *Векторний добуток векторів заданих в прямокутній декартовій системі координат дорівнює визначнику вигляду:*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Доведення. Використовуючи алгебраїчні властивості векторного добутку, обчислимо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+$$

$$+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=$$

За допомогою таблиці векторних добутків ортів:

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=$$

$$=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\vec{j}(a_xb_z-a_zb_x)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

Отриманий вираз є розкладом визначника $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$ за першим рядком.

Отже, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

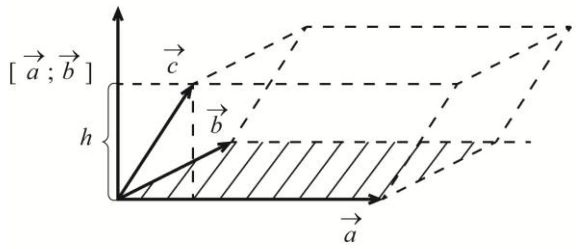
<u>Теорема 2.</u> *Необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів є пропорційність їх відповідних координат:*

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

§11. Мішаний добуток векторів

Означення 1. ***Мішаним добутком трьох векторів*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і позначаться: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

<u>Геометричний зміст мішаного добутку векторів.</u> Модуль мішаного добутку трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.



$$\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = V_{\text{паралелепіпеда}}.$$

Візьмемо три некомпланарні вектори $\vec{a},\ \vec{b}$ і $\vec{c}$, приведемо їх до спільного початку. Побудуємо на них паралелепіпед, як показано на рисунку.

Об'єм паралелепіпеда обчислюється за формулою:

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = S_{\text{основи}}h, \tag{18}$$

де h – висота паралелепіпеда, а $S_{\text{основи}}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$.

З геометричного змісту векторного добутку двох векторів випливає:

$$S_{\text{основи}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

З одного боку h – висота паралелепіпеда, а з іншого – проекція вектора $\vec{c}$ на векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто: $h = \left|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|$. Підставимо в (18):

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = S_{\text{основи}}h = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|.$$

Використовуючи геометричний зміст скалярного добутку, формула (17), маємо:

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\vec{c}.$$

Теорему доведено.

<u>Координатна форма запису мішаного добутку векторів.</u>

Нехай вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані координатами в прямокутній декартовій системі координат:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{c} = c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} + c_z\vec{k}.$$

<u>Теорема 1</u>. *Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих в прямокутній декартовій системі координат, дорівнює визначнику 3-го порядку, складеного з відповідних координат цих векторів.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

<u>Доведення</u>. Оскільки $\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$, то за властивістю скалярного добутку двох векторів $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_j \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Отриманий вираз є розкладом визначника $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ за третім рядком.

Теорему 1 доведено.

<u>Алгебраїчні властивості мішаного добутку векторів.</u>

1) Мішаний добуток змінює знак на протилежний при перестановці місцями двох векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b}.$$

2) Мішаний добуток не змінює знак при циклічній перестановці векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

3) Мішаний добуток не змінює знак при перестановці місцями знаку векторного і скалярного множення:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Доведення всіх властивостей випливає з алгебраїчних властивостей векторного і скалярного добутків.

<u>Геометричні властивості мішаного добутку векторів.</u>

1) Мішаний добуток трьох векторів має різний знак, залежно від того яку трійку утворюють вектори «праву» чи «ліву»:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\ \left[\begin{array}{l} >0,\ \textit{якщо}\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}-\text{«права» }\textit{трійка векторів},\\ <0,\ \textit{якщо}\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}-\text{«ліва» }\textit{трійка векторів}\ . \end{array}\right.$$

2) Для того щоб три вектори були компланарні, необхідно і достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю:

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\ \text{- } \textit{компланарні} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

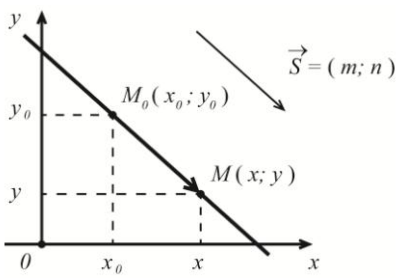
§1. Різні види рівнянь прямої на площині

Складемо рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{s}=(m;\ n)$. Вектор $\vec{s}$ називається *напрямним вектором* прямої l.

<u>Твердження.</u> Через точку, паралельно вектору можна провести пряму і лише одну.

1. *<u>Канонічне рівняння</u>.*

На прямій l візьмемо довільну точку $M(x;y)$, тоді



$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0).$$

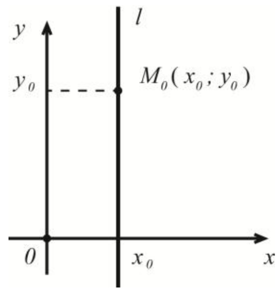
Оскільки, вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ - колінеарні,

$\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}$, то їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \tag{1}$$

(1) - канонічне рівняння прямої l.

Дослідимо рівняння (1).



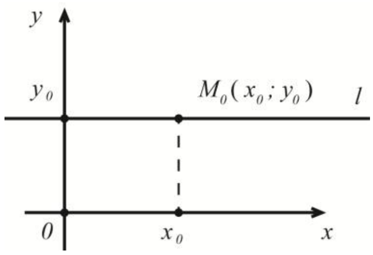
1) Якщо l проходить через точку $M_0(x_0;y_0)\parallel Oy$, то напрямний вектор $\vec{s}$ має координати: $\vec{s}=(0;\ n)$.

Отже, рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n},$$

З якого випливає $0=n(x-x_0)\Rightarrow x=x_0$ – рівняння вертикальної прямої l.

2) Якщо l проходить через точку $M_0(x_0; y_0) \parallel Ox$, то напрямний вектор $\vec{s}$ має координати: $\vec{s} = (m;\ 0)$.



Отже, рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0},$$

З якого випливає $0 = m(y - y_0) \Rightarrow y = y_0 -$ горизонтальна пряма l.

2. *<u>Параметричні рівняння прямої</u>*.

Прирівняємо (1) до параметра t, де $t \in R$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t,$$

та розв'яжемо відносно x і y:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases} \qquad (2)$$

(2) - параметричні рівняння прямої l.

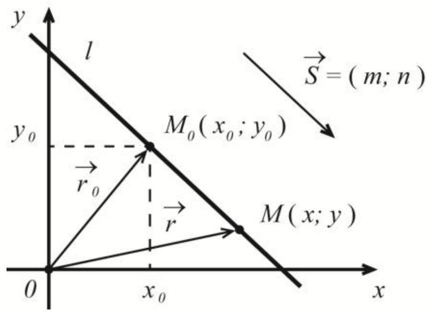
3. *<u>Векторне рівняння прямої</u>*.

На прямій l візьмемо довільну точку $M(x; y)$, тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}$ має координати:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0).$$

Радіус-вектори точок $M(x; y)$ і $M_0(x_0; y_0)$ відповідно

$$\vec{r} = (x; y),\ \overrightarrow{r_0} = (x_0;\ y_0).$$



З рисунка видно, що $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$, і $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, поклавши $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, $t \in R$,

отримаємо векторне рівняння прямої l:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{s}. \qquad (3)$$

4. *<u>Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку.</u>*

Канонічне рівняння прямої (1) при $m \neq 0$ можна записати у вигляді:

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0).$$

Відношення $\frac{n}{m} = k = tg\varphi$ називається *кутовим коефіцієнтом*, φ – кут між прямою і додатним напрямом осі Ox:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (4)$$

(4) – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$.

5. <u>Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.</u>

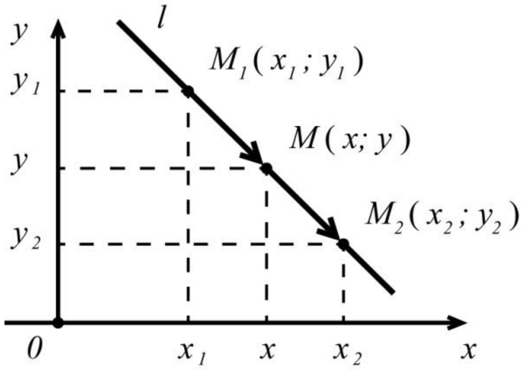
Перетворимо рівняння (4): $y = kx + (y_0 - kx_0)$ і позначимо $b = y_0 - kx_0$, тоді рівняння набуде вигляду:

$$y = kx + b \quad (5)$$

(5) – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, де b - довжина відрізка, що відтинає пряма на осі Oy.

6. <u>Рівняння прямої, що проходить через дві точки.</u>

Нехай задано дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки. Візьмемо довільну точку $M(x;\ y)$ на прямій l і розглянемо вектори:



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

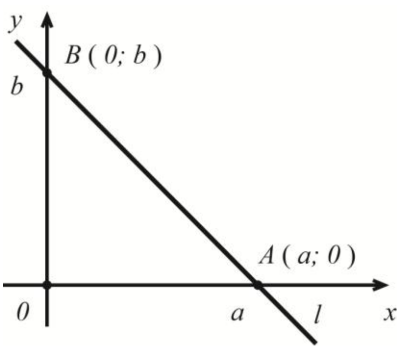
З рисунка видно, що вектори $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$. Тому, відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (6)$$

(6) - рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$.

7. <u>Рівняння прямої у відрізках на осях.</u>

Візьмемо на координатних осях точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$ і підставимо в рівняння (6), рівняння прямої, що проходить через дві точки:



$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0},$$

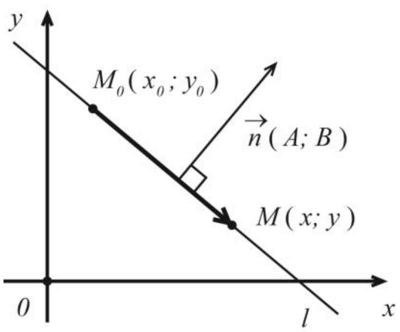
$$1 - \frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (7)$$

(7) - рівняння прямої у відрізках на осях.

8. *Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору*.

Складемо рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B)$. Вектор $\vec{n}$ називається *вектором нормалі* прямої l, або *нормальним вектором* прямої l.



Візьмемо довільну точку $M(x;\ y) \in l$ прямої l і запишемо координати вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0).$$

Оскільки, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до вектора нормалі $\vec{n}$, то їх скалярний добуток (згідно необхідної і достатньої умови) дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0.$$

Перейдемо до координатної форми запису скалярного добутку:

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0,$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (8)$$

(8) - рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\vec{n}(A; B)$.

9. *Загальне рівняння прямої*.

Розкриємо дужки в рівнянні (8): $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ і позначимо $C = -Ax_0 - By_0$:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (9)$$

(9) - загальне рівняння прямої. Дослідимо його в залежності від коефіцієнтів.

1. Якщо $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, то розділивши ліву і праву частини рівняння на $-C$, отримаємо рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1,$$

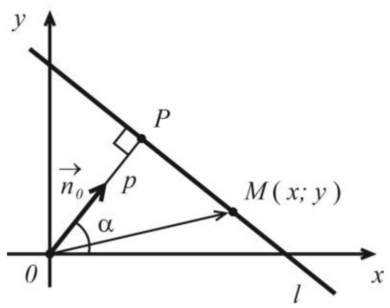
$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

де $a=\frac{-C}{A},\ b=\frac{-C}{B}$.

2) Якщо $A=0$, то рівняння (9) набуде вигляду: $By+C=0$ – це пряма, що паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0;-\frac{C}{B}\right)$, нормальний вектор якого: $\vec{n}=(0;B)$.
3) Якщо $B=0$, то рівняння (9) набуде вигляду: $Ax+C=0$ – це пряма, що паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A};0\right)$, нормальний вектор якого: $\vec{n}=(A;0)$.
4) Якщо $C=0$, то рівняння (9) набуде вигляду: $Ax+By=0$ – це рівняння прямої, що проходить через початок координат, нормальний вектор:
$$\vec{n}(A;B).$$
5) Якщо $A=C=0$, то рівняння (9) набуде вигляду: $By=0$, $y=0$ визначає вісь *Ox*.
6) Якщо $B=C=0$, то рівняння (9) набуде вигляду $Ax=0$, $x=0$ визначає вісь *Oy*.

10. Нормальне рівняння прямої.



Побудуємо пряму l, позначимо відстань від прямої до початку координат $p=d(O;l)$, $\overrightarrow{n^{\circ}}$ - орт вектора нормалі,

$$\overrightarrow{n^{\circ}}=(\cos\alpha\,;\sin\alpha).$$

Візьмемо довільну точку на прямій $M(x;y)\in l$, тоді радіус-вектор має координати $\overrightarrow{OM}=(x;y)$. З одного боку, з рисунку видно, що

$$\overrightarrow{OP}=\text{пр}_{\overrightarrow{n^{\circ}}}\overrightarrow{OM}=p.$$

З іншого боку, використовуючи геометричний зміст скалярного добутку

$$\text{пр}_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{n^\circ}}{\left|\overrightarrow{n^\circ}\right|} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{n^\circ} = x\cos\alpha + y\sin\alpha. \tag{10}$$

Отже,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{11}$$

(11) – нормальне рівняння прямої l.

<u>*Властивості нормального рівняння*</u>

1) Оскільки $p > 0$, то вільний член $-\rho$ у рівнянні (10) буде завжди від'ємним числом.

2) Сума квадратів коефіцієнтів при x та y в рівнянні (10) дорівнює 1, оскільки $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Зауваження. Щоб загальне рівняння прямої $l\colon Ax + By + C = 0$ звести до нормального рівняння, потрібно домножити його на нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

Знак μ вибирається протилежним до знаку вільного члена C.

Висновок. Всі рівняння прямої на площині є рівняннями першого степеня відносно змінних x та y, отже, є лінійними рівняннями.

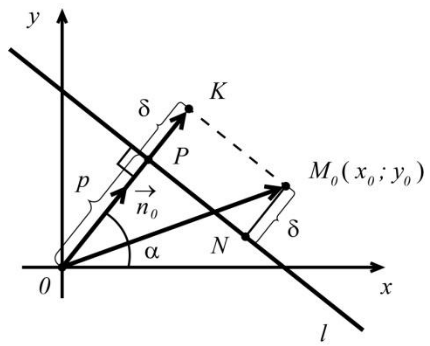
Відхилення точки від прямої.

Нехай пряма l задана нормальним рівнянням:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

1) Візьмемо довільну т. $M_0(x_0; y_0) \notin l$, таким чином, що точка M_0 і початок координат т. $O(0;0)$ розташовані по різні боки від прямої l, позначимо NM_0 - відхилення т. M_0 від прямої l

$$NM_0 = \delta(M_0 l).$$



З одного боку з рисунка видно, що

$$np_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{OM_0} = \left|\overrightarrow{OK}\right| = p + \delta. \tag{12}$$

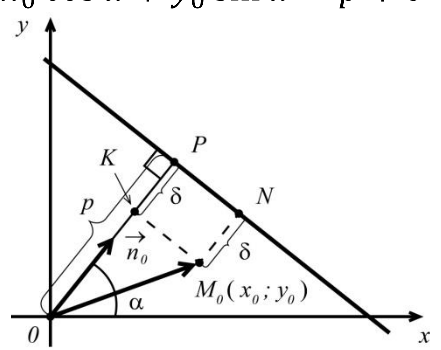
З іншого боку за формулою (10)

$$np_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM_0}\cdot\overrightarrow{n^\circ} = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha. \tag{13}$$

Оскільки $\overrightarrow{OM_0} = (x_0; y_0)$, а з нормального рівняння прямої нормальний вектор прямої має координати: $\overrightarrow{n^\circ} = (\cos\alpha\,; \sin\alpha)$. Об'єднуючи (12) і (13), отримаємо:

$$x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha = p + \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \delta(M_0; l) = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p > 0.$$



2) Якщо т. $M_0(x_0; y_0)$ і початок координат т. $O(0;0)$ розташовані по один бік від прямої l, то

відхилення т. $M_0(x_0;y_0)$ від прямої l: $\delta = NM_0$ і відстань від початку координат до прямої l: $|\overrightarrow{OP}| = p$.

З одного боку з рисунка видно, що

$$np_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{OM_0} = |\overrightarrow{OK}| = p - \delta.$$

З іншого боку за формулою (10):

$$np_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{n^\circ} = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha,$$

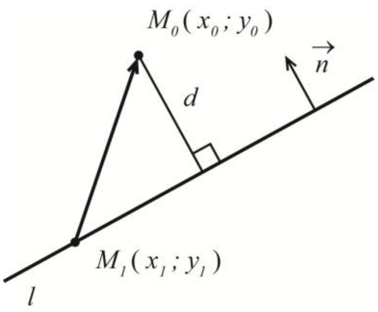
Об'єднуючи останні формули отримаємо: $x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha = p - \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta(M_0;l) = -(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p) < 0.$$

Висновок. Якщо точка M_0 і початок координат розташовані по різні боки від прямої l, то відхилення точки від прямої додатне $\delta(M_0;l) > 0$, якщо по один бік від прямої, то відхилення точки від прямої l від'ємне $\delta(M_0;l) < 0$.

Основні задачі про пряму на площині

1. Відстань від точки до прямої.



а) Нехай пряму l задано загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$. Знайти відстань від деякої точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої l.

<u>Розв'язання</u>. Із загального рівняння прямої знайдемо нормальний вектор:

$$\vec{n} = (A;B).$$

Візьмемо на прямій l довільну точку $M_1(x_1;y_1)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1).$$

З рисунка видно, що відстань від точки M_0 до прямої l: $d = |\text{пр}_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{M_1M_0}|$. З геометричного змісту скалярного добутку випливає:

$$d = |\text{пр}_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\overrightarrow{n^\circ} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\overrightarrow{n^\circ}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{оскільки т.} M_1(x_1;y_1) \in l \\ Ax_1 + By_1 + C = O \Rightarrow \\ -(Ax_1 + By_1) = C \end{array} \right| =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отже, відстань від будь-якої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої l заданої загальним рівнянням, обчислюється за формулою:

$$\boxed{d(M_0; l) = \frac{|Ax_0 + Bx_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}. \qquad (13.1)$$

б) Якщо пряма l задана нормальним рівнянням:

$$l:\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

то відстань від деякої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої l дорівнює модулю відхилення заданої точки від прямої: $d(M_0; l) = |\delta(M_0; l)|$. Яке в свою чергу ми обчислювали вище.

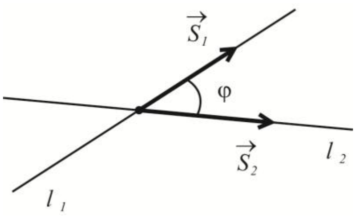
2. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

а) Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}; \qquad l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

Напрямні вектори відповідно:

$$\overrightarrow{s_1} = (m_1; n_1); \qquad \overrightarrow{s_2} = (m_2; n_2).$$



З рисунка видно, що кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює куту між їх напрямними векторами:

$$\varphi = (\widehat{l_1; l_2}) = (\widehat{\overrightarrow{s_1}; \overrightarrow{s_2}}).$$

Обчислимо його, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}}. \qquad (14)$$

З рівняння (14) випливають умови *паралельності та перпендикулярності прямих* l_1 і l_2:

- якщо $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2}$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (15)$$

(15) – *умова паралельності* прямих l_1 і l_2.

- якщо $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{s_1}; \overrightarrow{s_2}) = 0$ тоді з рівняння (14) випливає:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (16)$$

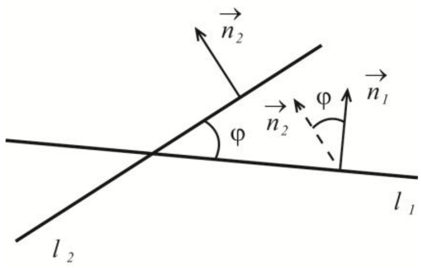
(16) – *умова перпендикулярності* прямих l_1 і l_2.

б) Нехай прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Нормальні вектори відповідно:

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1); \qquad \overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2).$$



З рисунка видно, що кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює куту між їх нормальними векторами: $\varphi = \left(\widehat{l_1; l_2}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}}\right)$ - як кути із взаємно перпендикулярними сторонами.

Обчислимо, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}} \qquad (17)$$

З рівняння (17) випливають умови *паралельності та перпендикулярності прямих* l_1 і l_2:

- якщо $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (18)$$

(18) – *умова паралельності* прямих l_1 і l_2.

- якщо $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}) = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (19)$$

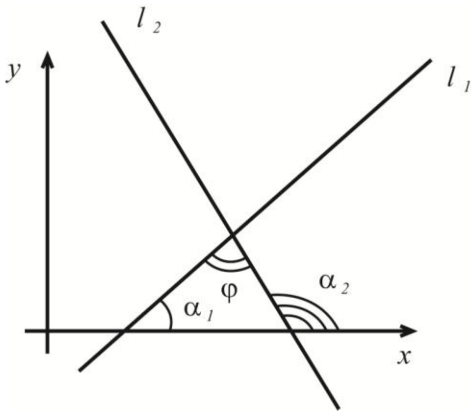
(19) – *умова перпендикулярності* прямих l_1 і l_2.

в) Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$l_1: y = k_1x + b_1; \qquad l_2: y = k_2x + b_2;$$

де кутові коефіцієнти відповідно:

$$k_1 = tg\alpha_1; \qquad k_2 = tg\alpha_2.$$



Кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює різниці кутових коефіцієнтів:$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, тоді

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} =$$

$$= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}} \qquad (20)$$

(20) - формула обчислення кута між прямими l_1, l_2.

Зауваження 1. Кут φ - це кут між прямими l_1, l_2, і кут на який потрібно повернути пряму l_1 проти руху годинникової стрілки, щоб вона співпала з прямою l_2.

З рівняння (20) випливають умови *паралельності та перпендикулярності прямих* l_1 і l_2:

• якщо $l_1 \parallel l_2$, тоді $\varphi = 0°$, тоді з рівняння (20) випливає:

$$k_2 - k_1 = 0,$$

$$k_1 = k_2 \qquad (21)$$

(21) – *умова паралельності* прямих l_1 і l_2.

• якщо $l_1 \perp l_2$, тоді φ=90°, оскільки $tg\ 90° \nexists$, то з рівняння (20) випливає:

$$1 + k_1 k_2 = 0,$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (22)$$

(22) – *умова перпендикулярності* прямих l_1 і l_2.

Зауваження 2. Усі формули кутів (14), (17), (20) дають змогу обчислити один із двох суміжних кутів, що утворюються при перетині двох прямих, другий кут дорівнює $\pi - \varphi$.

Зауваження 3. Щоб визначити лише гострий кут між прямими у формулах кутів (14), (17), (20) праву частину беруть за модулем.

§2. Різні види рівнянь площини

Знайдемо рівняння площини P, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$. Вектор $\vec{n}$ називається *вектор нормалі* площини P, або нормальним вектором.

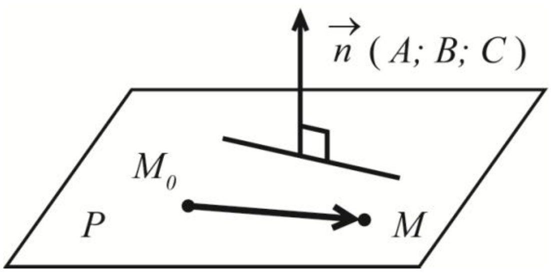
1. Рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору.

На площині P візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ і побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0).$$

Оскільки точки M_0 і M належать площині P, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, отже

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (23)$$

(23) – рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

2. *Загальне рівняння площини.*

Розкриємо дужки в рівнянні (23) і зведемо подібні доданки

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

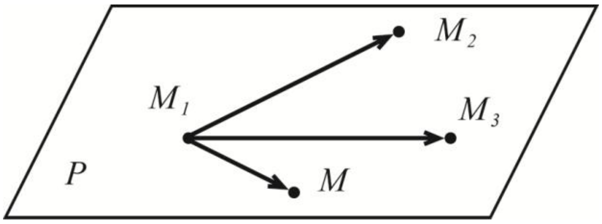
позначимо $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$:.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (24)$$

(24) - загальне рівняння площини.

3. *Рівняння площини, що проходить через три точки.*

Нехай задано три точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що належать площині P, але не лежать на одній прямій. На площині P візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ і побудуємо вектори:



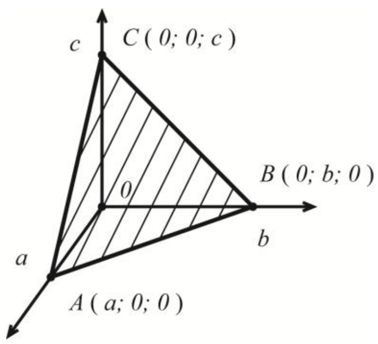
$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$;
$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$;
$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1)$.
Оскільки $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ - компланарні, тоді мішаний добуток

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

(25) - рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

4. *Рівняння площини у відрізках на осях.*



Нехай, площина P проходить через точки, що лежать на осях координат: $A(a; 0; 0)$; $B(0; b; 0)$; $C(0; 0; c)$. Підставимо їх координати в рівняння (25):

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0,$$

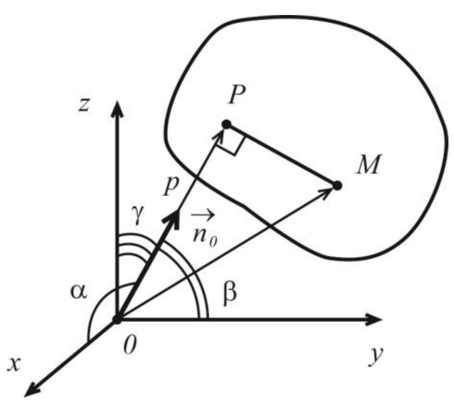
$$P\colon (x - a)bc - y(-ac) + zab = 0,$$

$$xbc + yac + zab = abc \,|\colon abc,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (26)$$

(26) – рівняння площини у відрізках на осях.

5. *Нормальне рівняння площини.*



На площині P візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ і побудуємо радіус-вектор $\overrightarrow{OM} = (x;y;z)$. Позначимо відстань від початку координат до площини P: $p = d(O;P)$, орт нормального вектора площини P - вектор $\overrightarrow{n^\circ}$, кути, які він утворює з осями координат відповідно:

$$\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{n^\circ}, Ox}\right), \beta = \left(\widehat{\overrightarrow{n^\circ}, Oy}\right); \gamma = \left(\widehat{\overrightarrow{n^\circ}, Oz}\right),$$

$$\overrightarrow{n^\circ} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma).$$

Тоді з одного боку пр$_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OP}\right| = p$.

А з іншого боку, з геометричного змісту скалярного добутку, випливає:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{n^\circ}}\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n^\circ}}{\left|\overrightarrow{n^\circ}\right|} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n^\circ} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Отже, прирівнявши отримаємо: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (27)$$

(27) – нормальне рівняння площини.

Властивості нормального рівняння площини

1) Оскільки відстань від початку координат до площини P величина додатня $p > 0$, то вільний член $-p < 0$.

2) сума квадратів коефіцієнтів при x, y, z дорівнює 1, згідно співвідношення направляючих косинусів:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Зауваження 1. Для того, щоб звести загальне рівняння площини P до нормального вигляду, потрібно домножити його на нормуючий множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

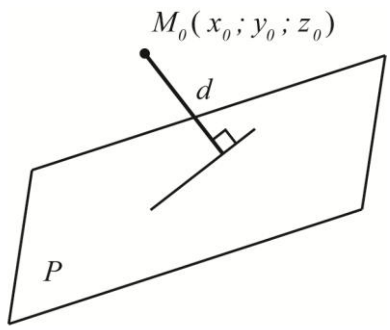
знак μ вибираємо протилежним до знаку вільного члена *D* рівняння (24).

Основні задачі про площину

1. Відстань від точки до площини.

а) Нехай площину P задано загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Знайти відстань від деякої точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини P.

Розв'язання. Із загального рівняння площини знайдемо нормальний вектор:



$$\vec{n} = (A;B;C)$$

Візьмемо на площині P довільну точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1).$$

Відстань від точки M_0 до площини P:

$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}^\circ}\, \overrightarrow{M_1M_0}\right|$. З геометричного змісту скалярного добутку випливає:

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}^\circ}\, \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\vec{n}^\circ \cdot \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\vec{n}^\circ\right|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \begin{vmatrix} \text{оскільки т.}\, M_1(x_1;y_1;z_1) \in P \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = O \Longrightarrow \\ -(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отже, відстань від будь-якої точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини P заданої загальним рівнянням, обчислюється за формулою:

$$\boxed{d(M_0;P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

б) Якщо площина P задана нормальним рівнянням:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

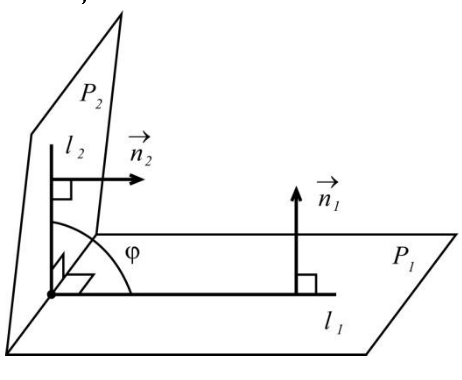
то відстань від деякої точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини P дорівнює модулю відхилення заданої точки від прямої: $d(M_0;P) = |\delta(M_0;P)|$.

$$\delta(M_0;P) = -(x_0\cos\alpha + y_0 cos\beta + z_0 cos\gamma - p) \qquad (28)$$

(28) - відхилення точки від площини, виводиться аналогічно до виведення формули відхилення точки від прямої на площині.

Висновок. Якщо точка M_0 і початок координат розташовані по різні сторони від площини P, то відхилення точки від площини додатне $\delta(M_0;P) > 0$, якщо по одну сторону від площини, то відхилення точки від площини P від'ємне $\delta(M_0;P) < 0$.

2.Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин.



а) Нехай площини P_1 і P_2 задані загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Нормальні вектори відповідно:

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1),$$
$$\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2).$$

Двогранний кут між площинами P_1 і P_2 вимірюється лінійним кутом, який утворений нормальними векторами цих площин $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$.

$$\varphi = \left(\widehat{P_1; P_2}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{n_1}\,;\,\overrightarrow{n_2}}\right).$$

Обчислимо кут, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \quad (29)$$

З рівняння (29) випливають умови *паралельності, співпадання та перпендикулярності площин* P_1 і P_2 :

- якщо $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (30)$$

(30) – умова *паралельності* площин P_1 і P_2.

- якщо P_1 і P_2 співпадають:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (31)$$

(31) – умова *співпадання* площин.

- якщо $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}) = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (32)$$

(32) – умова *перпендикулярності* прямих l_1 і l_2.

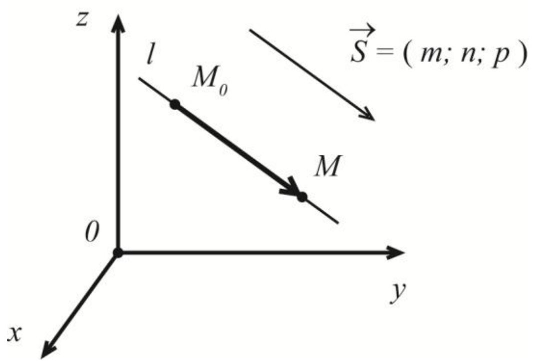
§3. Рівняння прямої у просторі

Складемо рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m; n; p)$. Вектор $\vec{s}$ називається *напрямним вектором* прямої l.

1. *Канонічне рівняння прямої в просторі*.

На прямій l візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$, тоді

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0; z - z_0).$$



Оскільки, вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ - колінеарні, їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{33}$$

(33) - канонічне рівняння прямої l в просторі.

2. *Параметричні рівняння прямої в просторі.*

Прирівняємо (33) до параметра t, де $t \in R$:

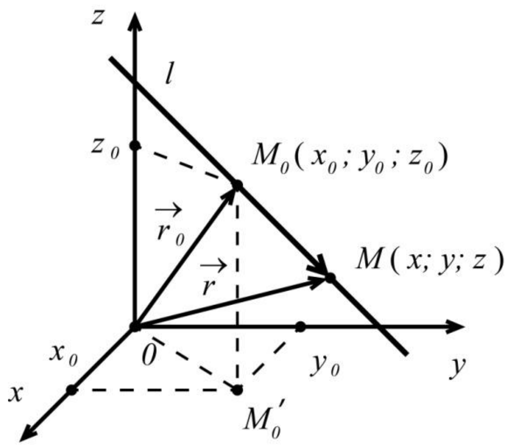
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

Розв'яжемо відносно x і y, z :

$$\begin{cases} x=x_0+tm, \\ y=y_0+tn, \\ z=z_0+tp \end{cases} \tag{34}$$

(34) - параметричні рівняння прямої l в просторі.

3. *Векторне рівняння прямої в просторі.*



На прямій l візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$, тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}$ має координати: $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;z-z_0)$.

Радіус-вектори точок $M(x;y;z)$ і $M_0(x_0;y_0;z_0)$ відповідно:

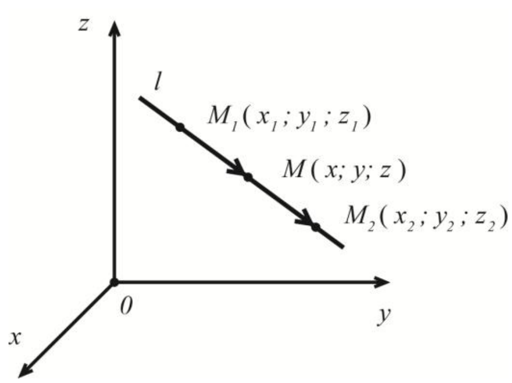
$$\vec{r}=(x;y;z),$$
$$\overrightarrow{r_0}=(x_0;\ y_0;z_0).$$

Оскільки $\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+\overrightarrow{M_0M}$, і $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}$, поклавши $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{s}$, $t\in R$, отримаємо векторне рівняння прямої l в просторі:

$$\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+t\vec{s}. \tag{35}$$

4. *Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки.*

Нехай задано дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки. Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на прямій l і розглянемо вектори:



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2},$ то відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (36)$$

(36) - рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

5. *<u>Загальне рівняння прямої в просторі</u>*.

Пряма у просторі задається перетином двох непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (37)$$

(37) – загальне рівняння прямої в просторі, де

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ - рівняння площини P_1,

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$- рівняння площини P_2,

Площини P_1і P_2 - непаралельні. Нормальні вектори відповідно:

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1), \overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2).$$

Направляючий вектор є векторним добутком нормальних векторів площин:

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

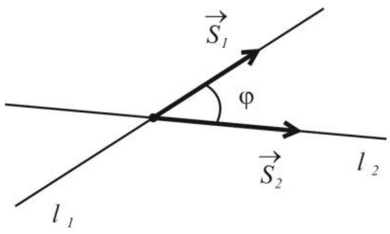
Основні задачі про пряму у просторі та пряму і площину.

1. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \qquad l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Напрямні вектори відповідно:



$$\overrightarrow{s_1} = (m_1; n_1; p_1); \qquad \overrightarrow{s_2} = (m_2; n_2; p_2).$$

З рисунка видно, що кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює куту між їх напрямними векторами:

$$\varphi = \left(\widehat{l_1; l_2}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{s_1}; \overrightarrow{s_2}}\right).$$

Обчислимо його, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}}. \qquad (38)$$

З рівняння (38) випливають умови *паралельності та перпендикулярності прямих* l_1 і l_2:

- якщо $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2}$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (39)$$

(39) – *умова паралельності* прямих l_1 і l_2.

- якщо $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{s_1}; \overrightarrow{s_2}) = 0$ тоді з рівняння (38) випливає:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \qquad (40)$$

(40) – *умова перпендикулярності* прямих l_1 і l_2.

2. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності.

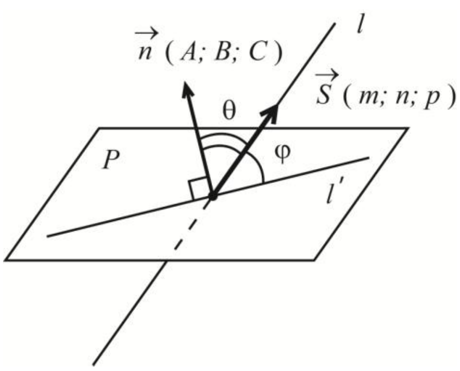
Нехай пряма l задана канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

а площина P – загальним рівнянням: $Ax + By + Cz + D = 0$.
Знайти кут між ними φ.

Кут між прямою l і площиною P вимірюється кутом між прямою l і її проекцію l' на площину P .

Позначимо $\theta = \left(\widehat{\vec{S}, \vec{n}}\right)$ - кут між напрямним вектором $\vec{s}$ прямої l та вектором нормалі $\vec{n}$ площини P , які мають координати відповідно:



$$\vec{s} = (m; n; p); \quad \vec{n} = (A; B; C).$$

За означення скалярного добутку випливає:

$$cos\theta = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$

Оскільки,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

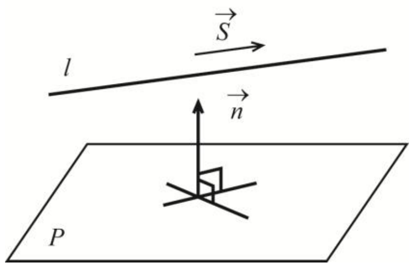
то

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{Am + nB + pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{Am + nB + pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \qquad (41)$$

(41) - формула обчислення кута між прямою та площиною.

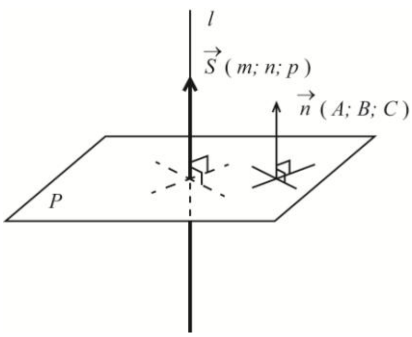
З рівняння (41) випливають умови *паралельності та перпендикулярності прямої* l *і площини* P:



- якщо $l \parallel P \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n} \Leftrightarrow (\vec{s};\vec{n}) = 0$ тоді з рівняння (41) випливає:

$$Am + nB + pC = 0 \qquad (42)$$

(42) - *умова паралельності прямої* l *і площини* P.



- якщо $l\perp P \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow$

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} \qquad (43)$$

(43) – *умова перпендикулярності* прямих *прямої* l *і площини* P.

3. *Умови належності двох прямих у просторі одній площині*.
   Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

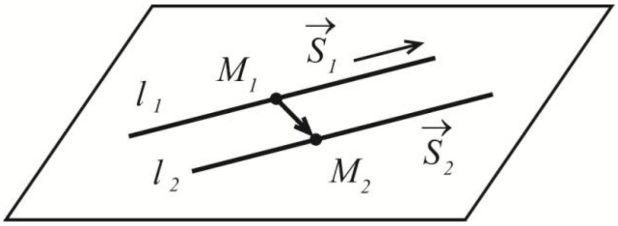
$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \qquad l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

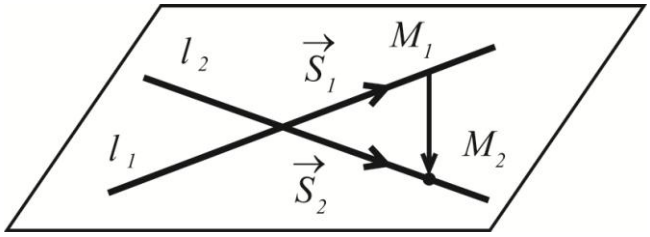
Дві прямі у просторі можуть бути:

- паралельні,
- перетинатися,
- мимобіжними.

Зауваження. Дві паралельні прямі в просторі завжди лежать в одній площині. Дві прямі в просторі, що перетинаються завжди лежать в одній площині.

Розглянемо кожен з випадків більш детально.





На кожній прямій l_1 і l_2 візьмемо довільну точкум M_1 і M_2 відповідно. Побудуємо вектор:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Напрямними векторами прямих l_1 і l_2 відповідно є вектори:

$$\overrightarrow{s_1} = (m_1; n_1; p_1); \qquad \overrightarrow{s_2} = (m_2; n_2; p_2).$$

Нехай вектори $\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$– компланарні, отже, мішаний добуток цих векторів рівний нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{S_2}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (44)$$

умова (44) - це лише *умова належності двох прямих у просторі одній площині*. Визначимо при яких умовах прямі паралельні, перетинаються чи є мимобіжними.

- Якщо виконується умова (44) і напрямні вектори прямих пропорційні

$$\overrightarrow{s_1} = \lambda\overrightarrow{s_2}, \lambda \in \boldsymbol{R},$$

то прямі l_1 і l_2 *паралельні* $l_1 \parallel l_2$.

- Якщо виконується умова (44) і напрямні вектори прямих непропорційні

$$\overrightarrow{s_1} \neq \lambda\overrightarrow{s_2}, \lambda \in \boldsymbol{R},$$

то прямі l_1 і l_2 *перетинаються* $l_1 \cap l_2$.

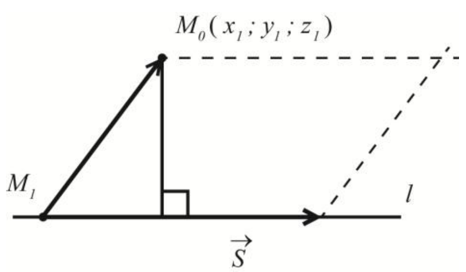
- Якщо умова (44) не виконується, то прямі l_1 і l_2 *мимобіжні.*

4. Відстань від точки до прямої в просторі.

Нехай пряма l задана канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

знайти відстань від деякої точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до прямої l.



<u>Розв'язання</u>. На прямій l візьмемо довільну точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$. Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l має координати

$$\vec{s} = (m; n; p).$$

Побудуємо паралелограм на векторах $\overrightarrow{M_1M_0}$ і $\vec{s}$.

З одного боку площа паралелограма обчислюється за формулою:

$$S_{\text{парал.}} = h \cdot |\vec{s}|,$$

де висота паралелограма h дорівнює відстані від точки M_0 до прямої l: $h = d(M_0, l)$.

З іншого боку з геометричного змісту векторного добутку випливає:

$$S = \left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{s}\right|.$$

Об'єднаємо останні результати:

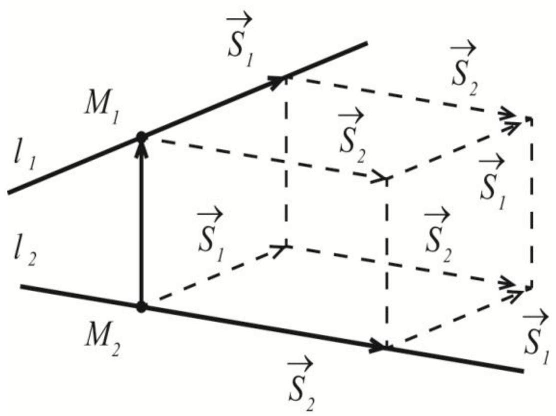
$$h = d(M_0, l) = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|}. \qquad (45)$$

(45) – формула знаходження відстані від точки до прямої в просторі.

5. *Відстань між мимобіжними прямими.*

Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \qquad l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$



Напрямними векторами прямих l_1 і l_2 відповідно є вектори:

$$\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1);$$
$$\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2).$$

На кожній прямій l_1 і l_2 візьмемо довільну точкум M_1 і M_2 відповідно. Отже, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Припустимо, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{S_1}$ і $\overrightarrow{S_2}$ - некомпланарні. Побудуємо на них паралелепіпед. З одного боку об'єм паралелепіпеда

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

оскільки основа паралелепіпеда – це паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{S_1}$ і $\overrightarrow{S_2}$, то використовуючи геометричний зміст векторного добутку його площа рівна:

$$S_{\text{осн}} = |\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|.$$

Отже, об'єм:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}| \cdot h.$$

З іншого боку, використовуючи геометричний зміст мішаного добутку, об'єм паралелепіпеда дорівнює:

$$V_{\text{парал.}} = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}\right|.$$

Об'єднаємо отримані результати:

$$|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}| \cdot h = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}\right|,$$

$$\boxed{d(l_1, l_2) = h = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}\right|}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|}} \qquad (46)$$

(46) – формула обчислення відстані між мимобіжними прямими.

Зауваження. Для виведення формули (46) ми припустили, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{S_1}$ і $\overrightarrow{S_2}$ – некомпланарні. У випадку компланарності векторів прямі l_1 і l_2 будуть лежати в одній площині, тобто відстань між ними обчислюється за формулою (13.1), як відстань між будь-якою точкою M_1 прямої l_1 і прямою l_2 на площині.

РОЗДІЛ 4. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§1. Поняття про лінії другого порядку.

Означення 1. ***Лінією другого порядку*** називається множина точок, координати яких задовольняють рівняння:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

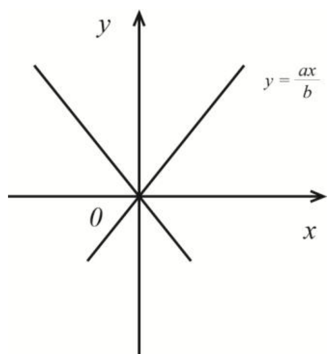
де $A, B, C, D, E, F \epsilon \mathbb{R}$,
$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$

Існує система координат, в якій рівняння (1) має найпростіший **канонічний вигляд.** Шляхом перетворення, рівняння (1) зводиться до таких ліній другого порядку:

1) коло: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
2) еліпс:
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$
3) гіпербола:
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$
$$\left(\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1\right)$$
4) парабола:
$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$
$$\big((x - x_0) = 2p(y - y_0)\big)$$

Крім того рівняння (1) може зводитись і не до лінійного другого порядку:

5) точка:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 0$$
6) пряма:
$$x^2 = a^2 => x = \pm a$$
$$y^2 = b^2 \qquad y = \pm b$$
7) сукупність двох прямих: $x^2 - y^2 = 0$



$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \;=>\; (ax - by)(ax + by) = 0$$

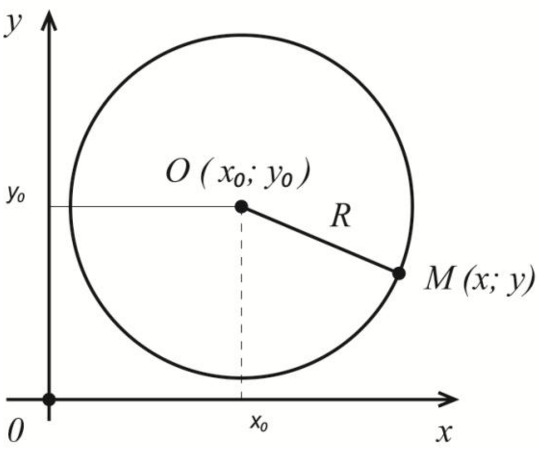
Зауваження: Коло, еліпс, гіпербола, парабола задаються рівняннями другого порядку. Обернене твердження не вірне!

§2. Коло.

Означення 1. Геометричне місце точок площини, відстані яких від фіксованої точки площини (центр кола) дорівнює сталому числу (радіусу) називається ***колом***.

1. *Рівняння кола в прямокутній декартовій системі координат*.

Розгялнемо прямокутну декартову систему координат, зафіксуємо точку $O(x_0; y_0)$, яка буде центром кола. позначимо R – радіус кола, тому $OM = R$. Візьмемо точку $M(x; y)$, яка належить колу.



Виведемо рівняння кола. За означенням відстань від довільної точки кола до центра дорівнює радіусу кола:

$$d(M; O) = R, \quad R = const$$

$$d(M; O) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

Отже, канонічне рівняння кола з центром $O(x_0; y_0)$ і радіусом R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$

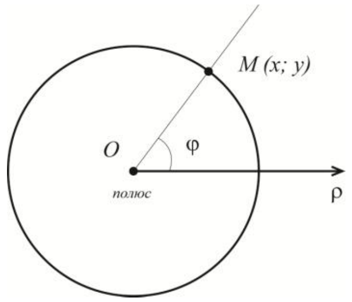
Якщо центр в точці $O(0; 0) => x^2 + y^2 = R^2$.

Властивості рівняння кола:

1) коефіцієнти при $x^2,\ y^2$ рівні між собою,
2) рівняння кола не містить доданок з xy $(C = 0)$.

2. ***<u>Рівняння кола в полярній системі координат</u>***.

Розглянемо полярну систему координат. Сумістимо центр кола і полюс. Використовуючи формули переходу від прямокутної декартової системи координат до полярної системи координат,



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\,, \\ y = \rho\sin\varphi\,; \end{cases} \qquad (3)$$

рівняння (2) набуде вигляду:

$$\rho = R \tag{4}$$

(4) – полярне рівняння кола з центром у полюсі і радіусом R.

3. *Параметричні рівняння кола*.

Якщо в формулах (3) покласти $\rho = R$ і φ - деякий параметр t,

$$t = \varphi = \angle(Ox; OM),\ M - \text{ довільна точка кола,}$$

отримаємо:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi) \tag{5}$$

(5) - параметричні рівняння кола з центром в точці $O(0; 0)$.

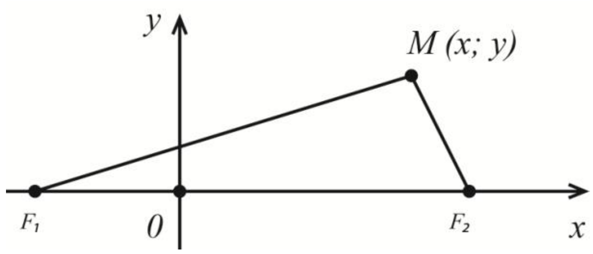
$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \tag{5.1}$$

$$t \in [0; 2\pi)$$

(5.1) – параметричні рівняння кола з центром в точці $O(x_0; y_0)$.

§3. Еліпс.

Означення 1. ***Еліпсом*** називається геометричне місце точок площини, сума відстаней, яких від фіксованих точок площини, які називаються ***фокусами***, є величина стала (більша відставні між фокусами) і дорівнює:



$$r_1 + r_2 = 2a > 2c$$

Розглянемо прямокутну декартову систему координат. Виведемо канонічне рівняння еліпса:

- Зафіксуємо дві точки: F_1 і F_2 назвемо їх фокусами еліпса і розмістимо прямокутну декартову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл.
- позначимо:
  - $F_1F_2 = 2c$ - <u>фокальна відстань</u> => $F_1(-c; 0), \quad F_2(c; 0)$
  - $\left.\begin{matrix} F_1M = r_1 \\ F_2M = r_2 \end{matrix}\right\}$ - <u>фокальні радіуси</u> еліпса

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad 2a > 2c => \boxed{a > c}$$

- за означенням кожен із фокальних радіусів:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \; r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Отже,

$$\left.\begin{matrix} r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ r_1 + r_2 = 2a \end{matrix}\right\} => \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Розв'яжемо отриману рівність:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частини рівняння:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

позначимо $a^2 - c^2 = b^2$, зауважимо, що за означенням $a > c$, тому $a^2 - c^2 > 0, => b^2 > 0$, отже заміна можлива. Отримаємо

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

(6) - канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2 > 0$.

Отримали рівняння другого степеня x та y, отже, еліпс – лінія другого порядку.

<u>Дослідження форми еліпса та його властивості.</u>

1) Рівняння (6) містить лише парні степені x та y це означає, що лінія симетрична відносно координатних осей Ox, Oy та точки $O(0;0)$, яку називають ***центром еліпса***.

2) Знайдемо точки перетину з осями координат.

Підставимо $y = 0$ в рівняння (6), отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 => x = \pm a.$$

Отже, точки перетину з віссю Ox: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.

Підставимо $x = 0$ в рівняння (6), отримаємо:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 => y = \pm b.$$

Отже, точки перетину з віссю Oy: $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

Отримані точки: A_1, A_2, B_1, B_2 називаються ***вершинами еліпса***;

$A_1A_2 = 2a$ – ***велика вісь*** еліпса;

$B_1B_2 = 2b$ – ***мала вісь*** еліпса.

3) З рівняння (6) випливає, що

- Кожен з доданків < 1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} < 1 \Rightarrow |x| < a \\ \frac{y^2}{b^2} < 1 \Rightarrow |y| < b \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

еліпс міститься в середині прямокутника утвореного прямими $x = \pm a$; $y = \pm b$.

-

при $x \nearrow$ від 0 до a
$y \searrow$ від b до 0 => В першій чверті частина еліпса – дуга A_2B_2

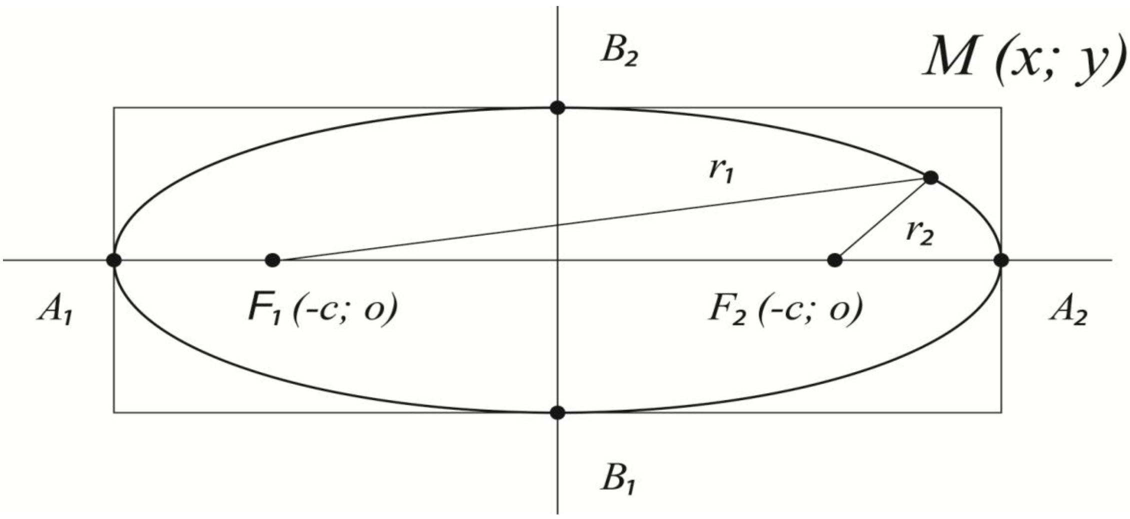
4) якщо в (6) покласти $a = b$, отримаємо рівняння кола $x^2 + y^2 = a^2$. це означає, що $c = 0$, оскільки $b^2 = a^2 - c^2$.

Зауваження. Коло окремий випадок еліпса, $R = a$.

Означення 2. Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, яка називається ***ексцентриситетом***.

Означення 3. ***Ексцентриситетом еліпса*** називається число, яке дорівнює відношенню півфокальної відстані до довжини більшої півосі:

$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ так, як $c < a$.



$$b^2 = a^2 - c^2 => \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

або

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} => \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

- якщо $\varepsilon = 0 => b = a =>$ еліпс перетворюється в коло
- якщо $\varepsilon \to 1 => \frac{b}{a} \to 0 =>$ еліпс розтягується вздовж осі *Ox*.

5) Мають місце формули: $r_1 = a + \varepsilon x,$
$r_2 = a - \varepsilon x.$

Означення 3. ***Директрисами еліпса*** називаються прямі

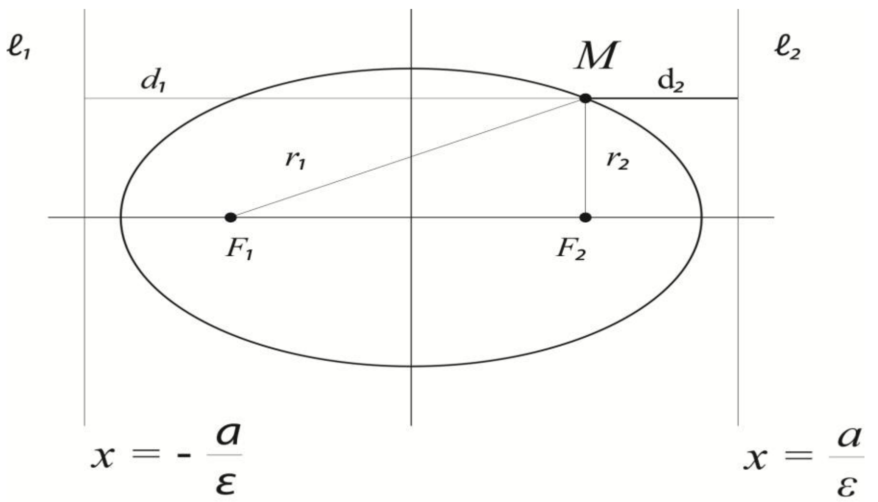
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon},$$

перпендикулярні до фокальної осі еліпса.

Теорема. *Відношення фокальних радіусів будь якої точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса:*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Розглянемо довільну точку $M(x;\ y)$, що належить еліпсу в першій чверті. Знайдемо фокальні радіуси:



$$r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$
$$r_2 = |MF_2| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Розв'яжемо систему відносно r_1 і r_2:

$$\begin{cases} r_1^2 - r_2^2 = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \qquad \begin{cases} (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \qquad \begin{cases} (r_1 - r_2)2a = 4cx \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 - r_2 = 2x\dfrac{c}{a} \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 - r_2 = 2x\varepsilon \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x \\ r_2 = a - \varepsilon x \end{cases} \tag{7}$$

Знайдемо відстань від довільної точки еліпса до директрис і позначимо d_1 та d_2 відповідно:

$$d_1 = d(M, \ell_1) = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}$$
$$d_2 = d(M, \ell_2) = \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right| = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon} \tag{8}$$

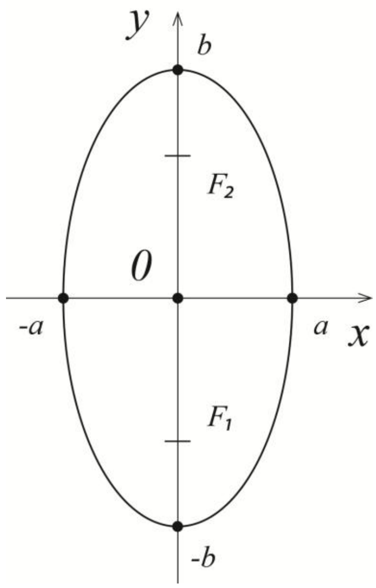
Використовуючи (7) та (8) знайдемо наступні відношення:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon; \qquad \frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon;$$

Теорему доведено.

6)

- Якщо $a > b$, то еліпс витягнутий вздовж осі Ox,
- Якщо $a < b$, то еліпс витягнутий вздовж осі Oy



(b – велика піввісь, a – мала піввісь)

Зауваження. У випадку, коли фокуси еліпса розташовані на осі Oy: $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, де

$c = \sqrt{b^2 - a^2}$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$,

$$r_1 = b + \varepsilon x$$
$$r_2 = b - \varepsilon x$$

Директриси паралельні осі Oy: $x = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Параметричні рівняння еліпса.

Параметричне рівняння еліпса з центром в точці $O(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} x - x_0 = a\cos t \\ y - y_0 = b\sin t \end{cases} => \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases}$$

де $t \epsilon [0; 2\pi], a > 0,\ b > 0.$

Параметричне рівняння еліпса з центром в точці $O(0; 0)$:

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

де $t \epsilon [0; 2\pi], a > 0,\ b > 0.$

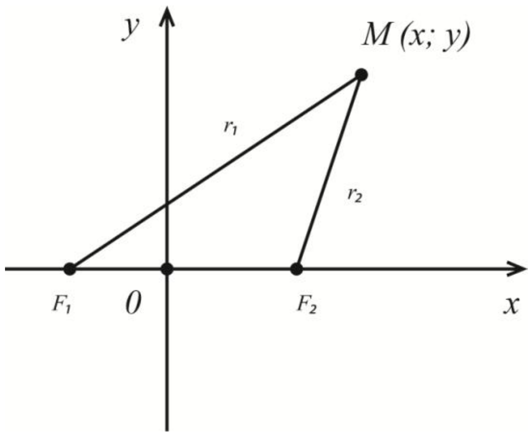
Зауваження 1. Ексцентриситет еліпса додатній і менший одиниці: $0 < \varepsilon < 1$

Зауваження 2. Якщо центр еліпса знаходиться в точці $C(x_0; y_0)$, отримаємо загальне рівняння еліпса:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

§4. Гіпербола.

Означення 1. ***Гіперболою*** називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок площини, що називаються ***фокусами*** є величина стала і менша відстані між фокусами.



$$|r_1 - r_2| = 2a < 2c.$$

Розглянемо прямокутну декартову систему координат. З означення виведемо канонічне рівняння гіперболи.

- Зафіксуємо дві точки: F_1 і F_2, що назвемо фокусами і розмістимо прямокутну декартову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а точка $O(0; 0)$ - ділила відрізок F_1F_2 навпіл.
- Позначимо:

  \- $F_1F_2 = 2c$ - *фокальна відстань* $=> \begin{matrix} F_1(-c; 0), \\ F_2(c; 0). \end{matrix}$

- $\left.\begin{array}{l} F_1M = r_1 \\ F_2M = r_2 \end{array}\right\}$ - *фокальні радіуси* гіперболи,

  де $M(x; y)$ – довільна точка гіперболи

- За означенням: $|r_1 - r_2| = 2a, 2a < 2c => \boxed{a < c}$

$$\left.\begin{array}{c} r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ |r_1 - r_2| = 2a \end{array}\right\} => \begin{array}{l} \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \end{array}$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частини рівняння:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2$$

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) = a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y = a^2(c^2 - a^2).$$

позначимо $c^2 - a^2 = b^2$, зауважимо, що за означенням $a < c$, тому $c^2 - a^2 > 0, => b^2 > 0$, отже заміна можлива. Отримаємо

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

(9) - канонічне рівняння гіперболи, де $b^2 = c^2 - a^2 > 0$.

Отримали рівняння другого степеня *x* та *y*, отже, гіпербола – лінія другого порядку.

Дослідження форми гіперболи та її властивості.

1) Рівняння (9) містить x, y лише в парних степенях, отже, гіпербола симетрична відносно вісей Ox та Oy і початку координат $O(0;0)$. Точка $O(0;0)$ називається *центром гіперболи*.
2) Знайдемо точки перетину з осями координат.

Підставимо $y = 0$ в рівняння (9), отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 => x = \pm a.$$

Отже, точки перетину з віссю Ох*:* $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$. $A_1A_2 = 2a$ - *дійсна вісь гіперболи.*

Підставимо $x = 0$ в рівняння (9), отримаємо:

$$\frac{y^2}{b^2} = -1 \ \emptyset$$

Отже, гіпербола не перетинає вісь Оу. $B_1B_2 = 2b$ – *уявна вісь гіперболи.*

Отримані точки: A_1, A_2 називаються *вершинами гіпердоли*;

$A_1A_2 = 2a$ – *дійсна вісь* гіперболи;

$B_1B_2 = 2b$ – *уявна вісь* гіперболи.

Прямокутник $A_1B_1A_2B_2$ (зі сторонами $2a$, $2b$) називається *основним прямокутником гіперболи.*

3) З рівняння (9) випливає: $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 => |x| > a => \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases}$

   Отже, всередині смуги, яка обмежена паралельними прямими $x = \pm a$ немає жодної точки гіперболи.
4) З рівняння (9) випливає: якщо $|x| \nearrow$, то $|y|$ також $\nearrow$, бо

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

5) прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами гіперболи*. Гіпербола складається з двох нескінченних віток (правої та лівої) симетричних відносно координатних осей та початку координат.
6) *Ексцентриситетом гіперболи* називається число ε, яке визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \varepsilon > 1 \quad a < c$$

Ексцентриситет гіперболи характеризує форму гіперболи.

$$b^2 = c^2 - a^2 =>$$

$$=> \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

або

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} => \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

- якщо $\varepsilon \to 1, => \frac{b}{a} \to 0$ і основний прямокутний розтягується в напрямі осі Oy, а гіпербола наближається до осі Ox.
- чим більше ε, тим більше $\frac{b}{a}$ і основний прямокутник розтягується в напрямі осі Oy, а гіпербола відхиляється від осі Ox.

7) **Означення 2**. ***Директрисами гіперболи*** називаються дві прямі

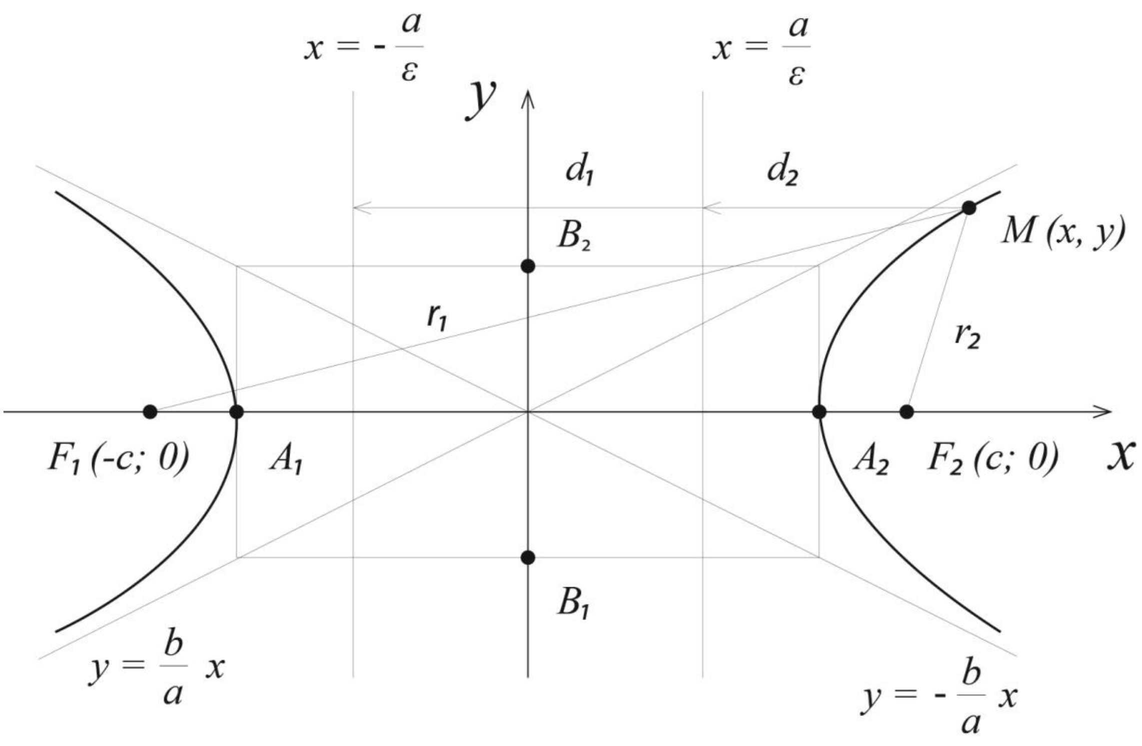
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$$

(a – дійсна піввісь), перпендикулярні до дійсної осі гіперболи.

Теорема. *Якщо r_1, r_2 - фокальні радіуси, точка М - довільна точка гіперболи, d_1, d_2 - відстані від точки М до відповідних директрис тоді має місце співвідношення:*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Доведення аналогічне еліпсу.



8) Якщо в (9) $a = b$, то

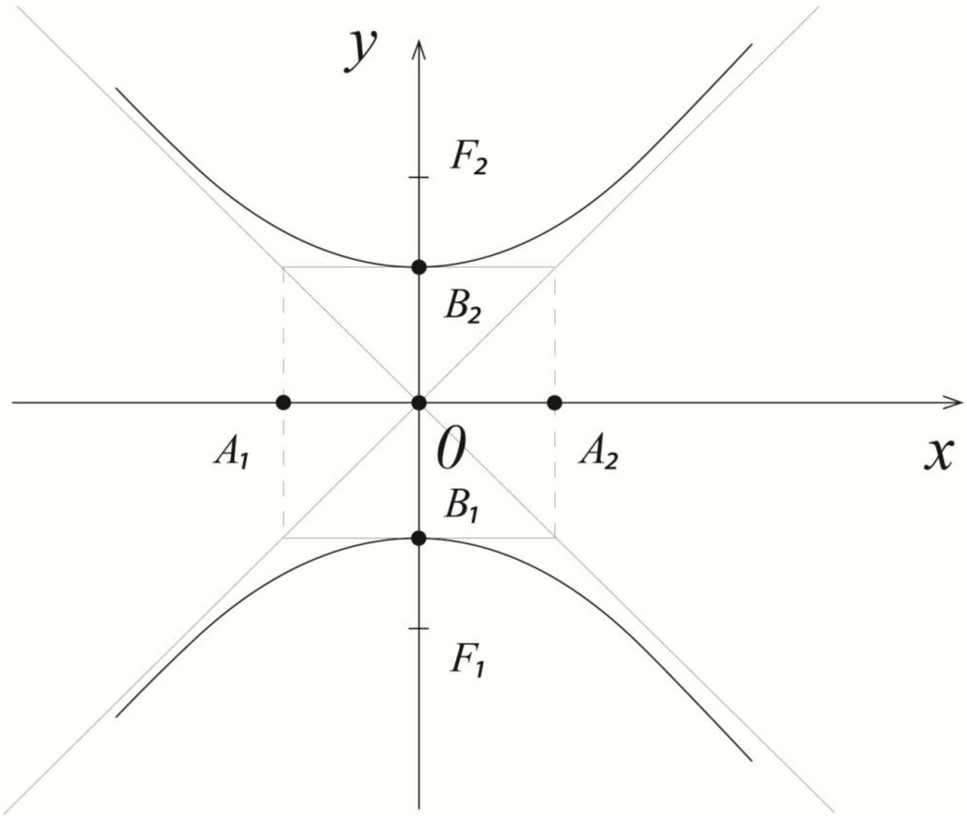
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$
$$x^2 - y^2 = a^2$$

Основний прямокутник гіперболи перетворюється в квадрат зі стороною $2a$.

Асимптотами гіперболи будуть прямі: $y = \pm x$.

Введемо поняття спряженої гіперболи. ***Спряженою гіперболою***, до (9) є гіпербола, у якої дійсна вісь – Oy, уявна вісь – Ox, фокуси якої $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$ на осі Oy і визначається рівнянням (10):

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\,. \tag{10}$$



Зауваження 1. Ексцентриситет гіперболи додатній і більший одиниці: $\varepsilon > 1$.

Зауваження 2. Якщо центр гіперболи знаходиться в точці $C(x_0; y_0)$, отримаємо загальне рівняння гіперболи:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Параметричні рівняння гіперболи.

Параметричне рівняння гіперболи з центром в точці $O(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} x - x_0 = a \operatorname{ch} t \\ y - y_0 = b \operatorname{sh} t \end{cases} => \begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{ch} t \\ y = y_0 + b \operatorname{sh} t \end{cases}$$

де $t = \left(\widehat{Ox; \overrightarrow{OM}}\right)$.

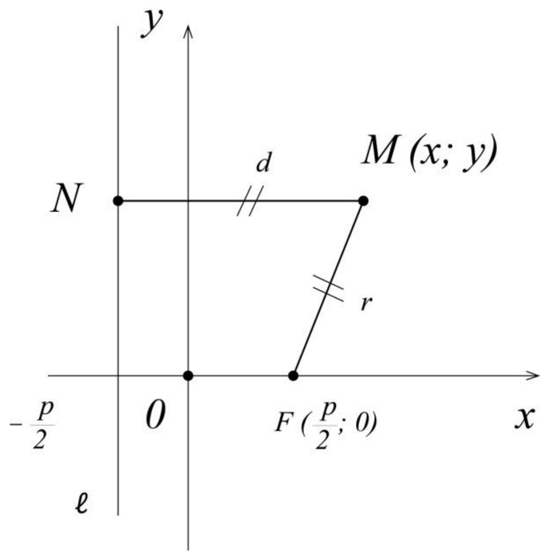
Параметричне рівняння гіперболи з центром в точці $O(0; 0)$:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$$

де $t = \left(\widehat{Ox; \overrightarrow{OM}}\right)$.

§5. Парабола.

Означення 1. ***Параболою*** називається геометричне місце точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від фіксованої точки площини, яка називається ***фокусом***, та фіксованої прямої, яка називається ***директрисою*** параболи і не проходить через фокус.



Розглянемо прямокутну декартову систему координат. Виведемо рівняння параболи з її означення.

- Зафіксуємо точку F (фокус), пряму ℓ (директриса) так, що $\ell \perp Ox$, та F лежить на Ox, а початок координат ділить відстань від фокуса до директриси навпіл.
- Позначимо відстань від фокуса до директриси ℓ, де ℓ: $x = -\frac{p}{2}$.

$$d(F, \ell) = p => F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

Нехай M – довільна точка з координатами $M(x; y)$.

- За означенням: $|MN| = |MF|$, де $N\left(-\frac{p}{2}; y\right)$

$$r = |MF| = \sqrt{\left(x - \frac{\rho}{2}\right)^2 + y^2}$$ - фокальний радіус

$$|MN| = x + \frac{\rho}{2}$$

$$x + \frac{\rho}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{\rho}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\left(x + \frac{\rho}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\rho}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\rho x = -\rho x + y^2$$

Отже, отримали канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px, \qquad (11)$$

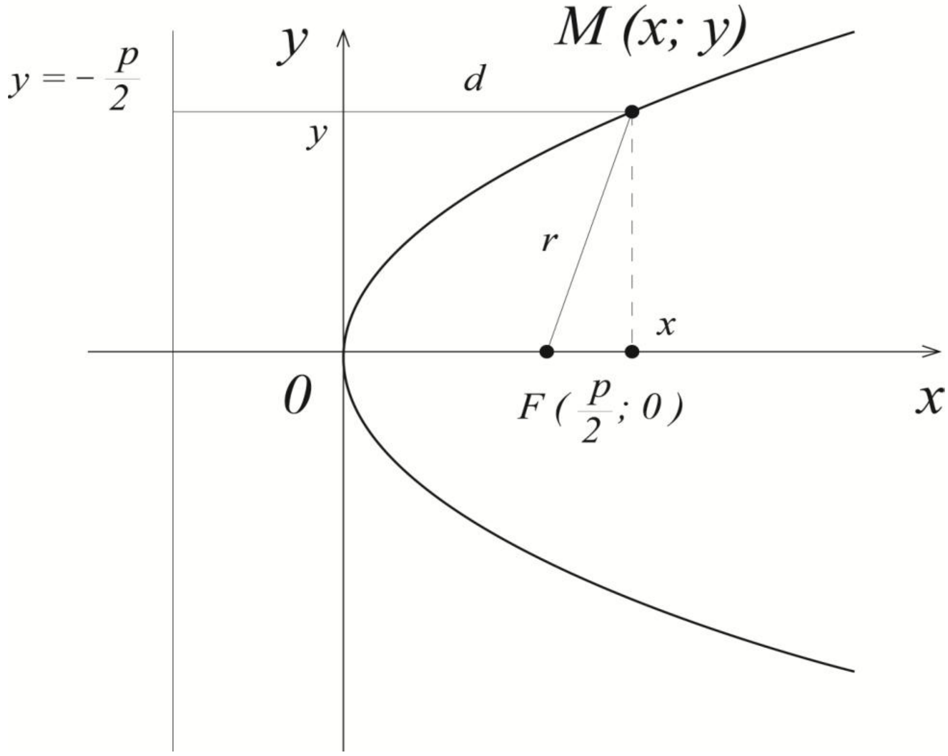
де $p > 0$ - параметр параболи.

<u>Дослідження форми параболи та її властивості</u>.

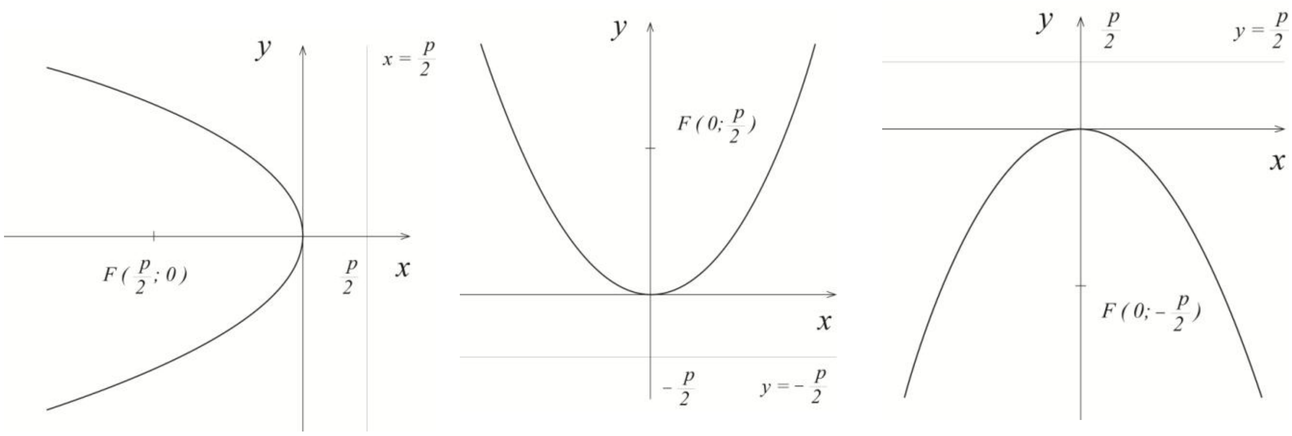
1) В (11) змінна у квадраті, тому парабола симетрична відносно осі Ox.
   Перетворимо (11): $y = \pm\sqrt{2\rho x}$.
   Дослідження проведемо лише при $y \geq 0$, тобто
   $$y = \sqrt{2\rho x} \qquad (12)$$
   і відобразимо графік відносно осі Ox, щоб отримати всю криву.
2) В (12) $p > 0 => x > 0$, отже, парабола розташована справа від осі Oy в першій чверті.
3) Знайдемо точки перетину з осями координат Ox, Oy: $x = 0, y = 0$.
   Точка $O(0; 0)$ називається ***вершина параболи.***
4) Якщо $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$. Отже, парабола в першій чверті має форму дуги. Ox буде віссю симетрії, а графік параболи симетричний відносно осі Ox.
5) Ексцентриситет параболи – це відношення фокального радіуса довільної точки $M(x; y)$ параболи до відстані від цієї точки до директриси:
   $$\frac{r}{d} = \varepsilon,$$

за означенням $\varepsilon = 1$.

6) Асимптот парабола не має.
7) Параметр p характеризує ширину області, яку обмежує парабола, чим більше p тим ширша парабола.



8) Рівняння параболи, вітками вліво: $y^2 = -2px$,
   Рівняння параболи, вітками вгору: $x^2 = 2py$,
   Рівняння параболи, вітками вниз: $x^2 = -2py$.



Зауваження 1. Ексцентриситет параболи дорівнює одиниці: $\varepsilon = 1$.

Зауваження 2. Якщо вершина параболи знаходиться в точці $C(x_0; y_0)$, отримаємо загальне рівняння параболи, вітками вправо:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

§6. Поверхні другого порядку.

Означення. Поверхнею другого порядку називається множина точок площини простору, координати яких задовольняють рівняння другого порядку відносно x, y, z вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0,$$

де $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0;$

$A, B, C, D, E, F, G, H, K, L \epsilon \mathbb{R}$

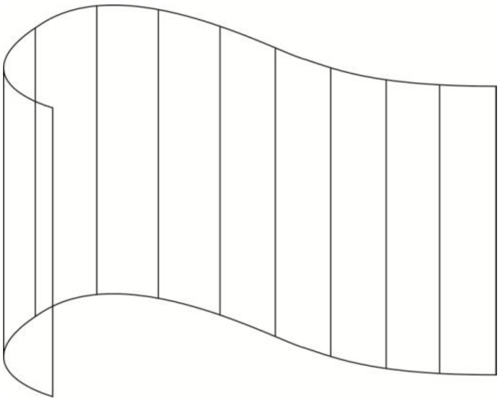
До поверхонь другого порядку належать:

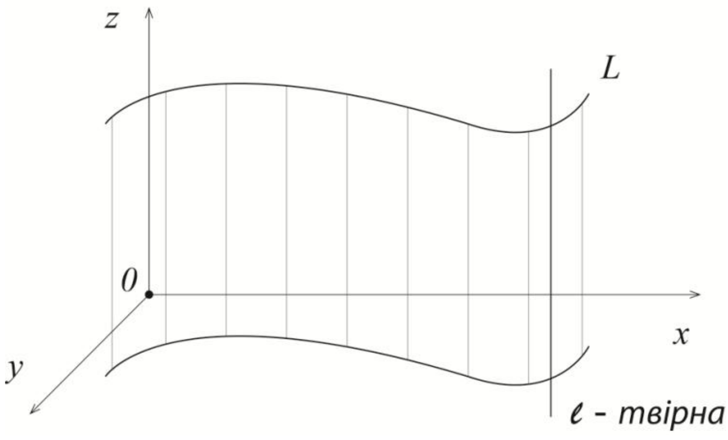
1) циліндричні;
2) конічні;
3) поверхні обертання;
4) сфера;
5) еліпсоїд;
6) однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди;
7) еліптичний і гіперболічний параболоїди.

§7. Циліндричні поверхні.

Означення. ***Циліндричною поверхнею*** називається поверхня, яка утворена сукупністю прямих (*твірних*), що паралельні деякій прямій ℓ при умові, що всі ці прямі перетинають деяку криву L, яка називається *напрямною*.

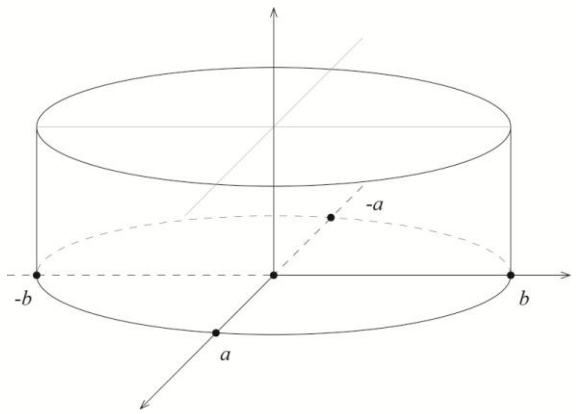
Будемо розглядати лише такі циліндричні поверхні, напрямні, яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, що перпендикулярні до цієї площини.





Нехай L: $F(x;\ y) = 0$ (13)

- якщо $M(x;\ y) \epsilon L => M(x;\ y)$ задовольняє (13), отже, (13) визначає геометричне місце точок простору, що лежать на циліндричній поверхні з напрямною L, та твірною ℓ паралельною Oz.
- якщо твірні паралельні осі Ox, а напрямна L лежить в площині Oyz, то циліндрична поверхня визначається рівнянням $F(y;\ z) = 0$;
- якщо твірні паралельні осі Oy, а напрямна L лежить в площині Oxz, то циліндрична поверхня визначається рівнянням $F(x;\ z) = 0$.



Розглянемо основні *циліндричні поверхні другого порядку*.

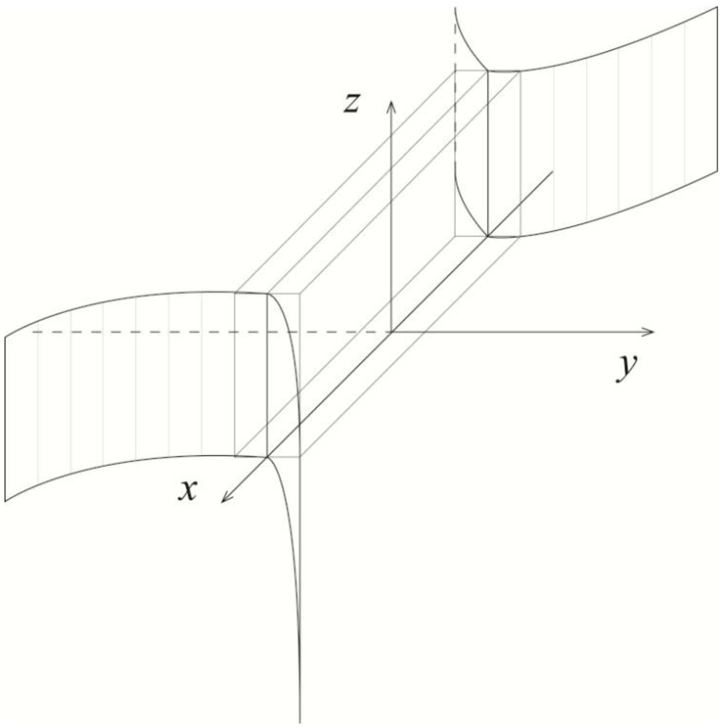
1) *Еліптичний циліндр*:

$$L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$(a > 0, b > 0)$$

якщо $a = b = R => x^2 + y^2 = R^2$ - *коловий циліндр*.

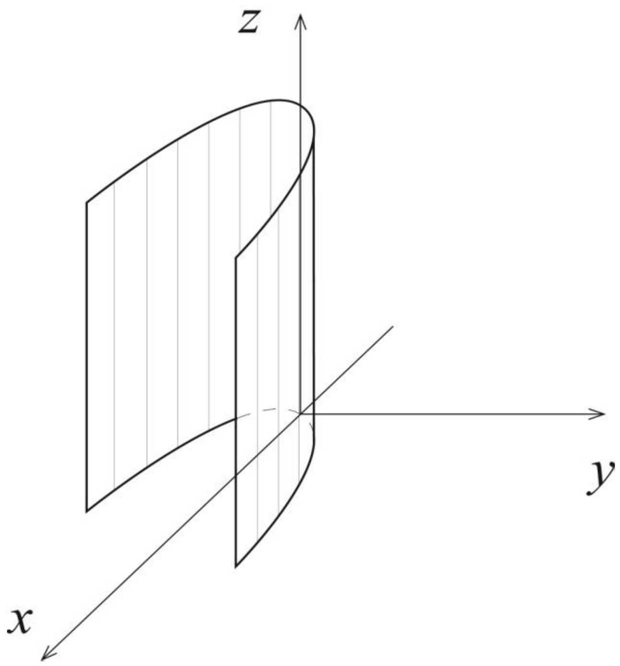
2) *Гіперболічний циліндр:*

$$L: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
$$(a > 0, b > 0)$$



3) Параболічний циліндр:

$$L: y^2 = 2px, \qquad p > 0.$$



§8. Еліпсоїд.

Означення. ***Еліпсоїдом*** називається поверхня, яка в прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (14)$$

$$(a, b, c > 0)$$

Дослідимо форму еліпсоїда і побудуємо його методом паралельних перерізів. Перетнемо еліпсоїд координатними площинами:

1. $O_{xy}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$

2. $O_{xz}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$

3. $O_{yz}: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$

4. $\begin{matrix} z = h \\ (h = const) \end{matrix} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$

Розглянемо випадок 4 відносно h. З рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \tag{15}$$

випливає, що

$$1 - \frac{h^2}{c^2} \geq 0,$$

$$h^2 \leq c^2,$$
$$-c \leq h \leq c.$$

1) Якщо $|h| > c$, то площина $z = h$ не перетинає поверхні;
2) Якщо $|h| = c$ $(h = \pm c)$, то площина $z = \pm c$ дотикається до еліпсоїда в точках: $C_1(0;\ 0;\ c)$, $C_2(0;\ 0;\ -c)$, оскільки рівняння (15) набуде вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

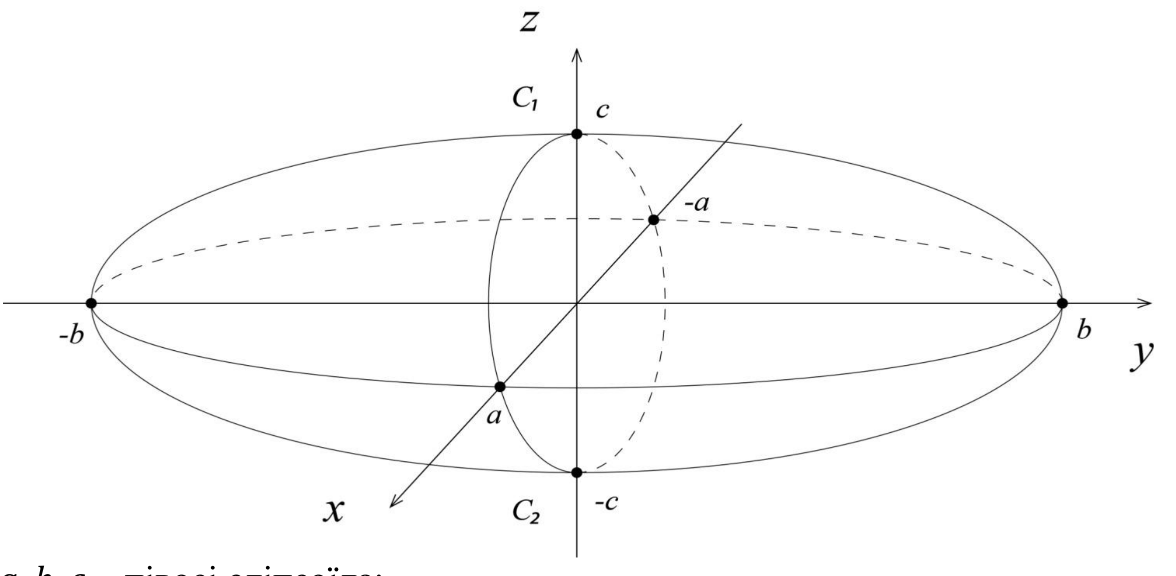
Розв'язком якого є лише значення $x = 0, y = 0$.

3) Якщо $|h| < c$, рівняння (15) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \tag{16}$$

де $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}};\ b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$.

(16) - еліпс в площині $z = h$.



a, b, c – півосі еліпсоїда;

- якщо $a \neq b \neq c$, то еліпсоїд називається *триосним еліпсоїдом*;

- якщо довільні дві півосі рівні між собою, то отримаємо *еліпсоїд обертання*.
- якщо $a = b = c = R$, то еліпсоїд обертається в *сферу*:
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Зауваження 1. Якщо центр еліпсоїда знаходиться в точці $C(x_0; y_0; z_0)$, отримаємо загальне рівняння еліпсоїда:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

$(a, b, c > 0)$.

§9. Двопорожнинний гіперболоїд.

Означення. ***Двопорожнинним гіперболоїдом*** називається поверхня, канонічне рівняння якої в прямокутній декартовій системі координат має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad (17)$$

$a, b, c > 0.$

З рівності (17) випливає:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} \geq 1 \Rightarrow z^2 \geq c^2$$

$$|z| \geq c, \qquad c > 0$$

Дослідження поверхні проведемо методом паралельних перерізів.

1. $O_{yz}: \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ - гіпербола
2. $O_{xz}: \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ - гіпербола
3. $O_{xy}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $(x; y) \in \emptyset$
4. $z = h: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h \end{cases}$

Дослідимо випадок 4 при різних значеннях h:

1) якщо $|h| < c, (c > 0)$, то площина $z = h$ не перетинає поверхні;
2) якщо $|h| = c$ $(h = \pm c)$, то площина $z = \pm c$ дотикається до гіперболоїда в точках: $A_1(0;\ 0;\ c)$, $A_2(0;\ 0;\ -c)$, оскільки рівняння (17) набуде вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Розв'язком якого є лише значення $x = 0, y = 0$.

3) Якщо $|h| > c,$ рівняння (17) набуде вигляду:

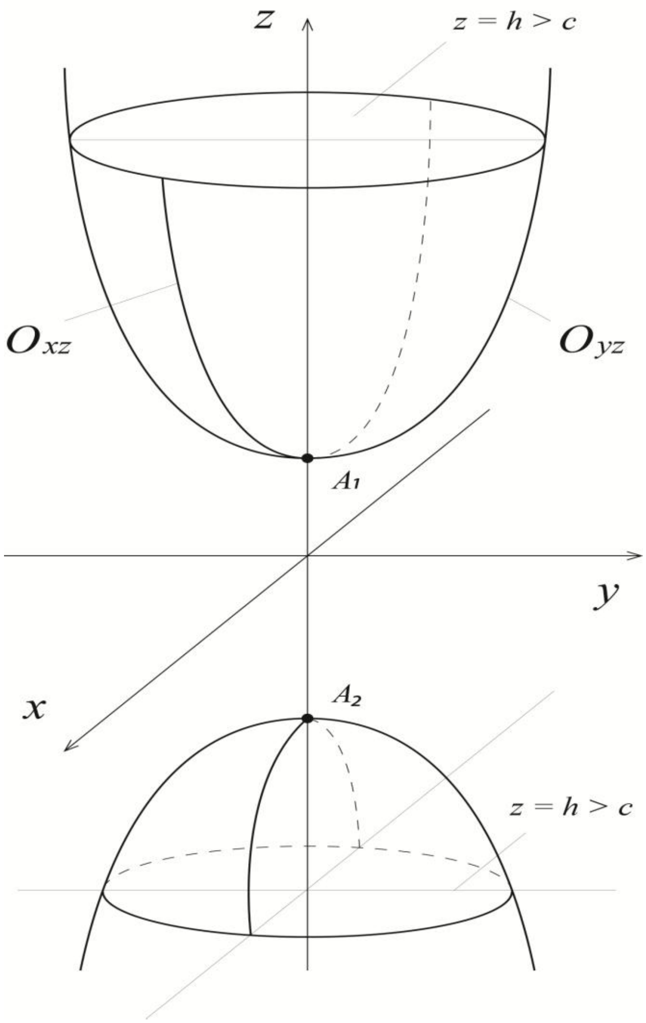
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \tag{18}$$

де $a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$; $b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$.

(18) - еліпс в площині $z = h$.

Отже, двопорожнинний гіперболоїд – це дві порожнини в формі опуклих нескінченних чаш, для яких:

- a, b – довжини уявних півосей,
- c – довжина дійсної півосі,
- точки A_1, A_2 - вершини гіперболоїда.



Зауваження 1. Рівняння гіперболоїда, чаші якого направлені на вісь Oy :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

$a, b, c > 0.$

Зауваження 2. Рівняння гіперболоїда, чаші якого направлені на вісь Ox:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

$a, b, c > 0.$

Зауваження 3. Якщо центр гіперболоїда знаходиться в точці $C(x_0; y_0; z_0)$, отримаємо загальне рівняння:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

$a, b, c\ > 0.$

§10. Однопорожнинний гіперболоїд

Означення. ***Однопорожнинним гіперболоїдом*** називається поверхня, канонічне рівняння якої в прямокутній декартовій системі координат має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{19}$$

$a, b, c\ > 0.$

Дослідження поверхні проведемо методом паралельних перерізів.

1) O_{xz}: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y\ =0\end{cases}$ – гіпербола,

2) O_{yz}: $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x\ =0\end{cases}$ – гіпербола,

3) O_{xy}: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y\ =0\end{cases}$ – еліпс,

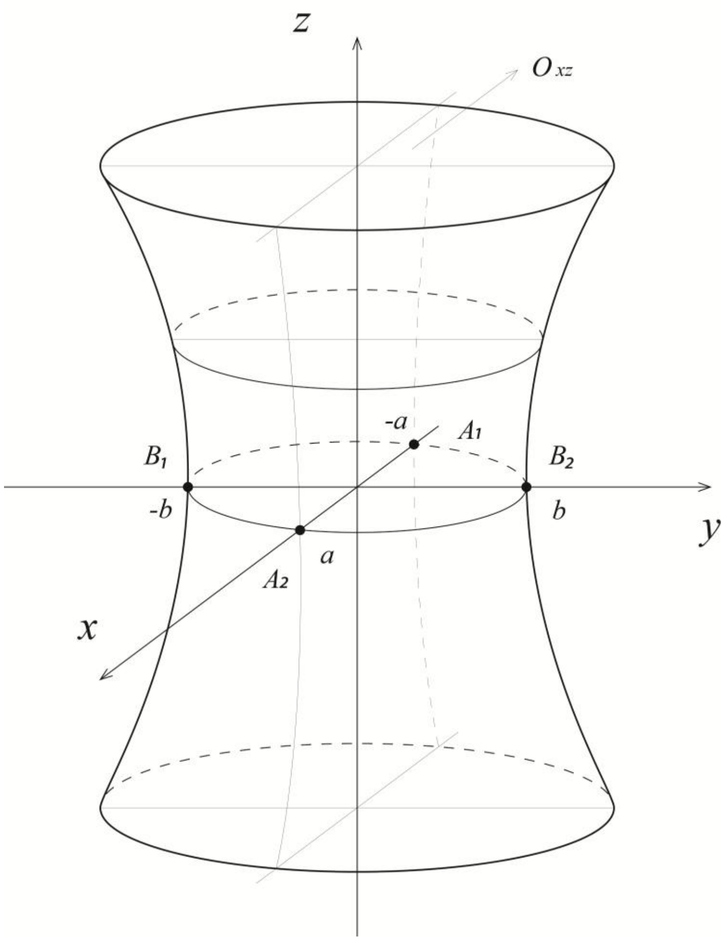
4) $z=h$: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1\\ z=h\end{cases}$ - сукупність еліпсів.

Дослідимо випадок 4 $(z=h)$. Рівняння (19) набуде вигляду:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\\ z\ =h,\end{cases} \tag{20}$$

де $a_1\ =a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$; $b_1\ =b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$.

(20) - еліпс в площині $z\ =h$.



Головними перерізами однопорожнинного гіперболоїда є гіперболи і еліпс.

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, яка необмежено розширюється від найменшого еліпса, що лежить у площині O_{xy}.

- Однопорожнинний гіперболоїд має чотири вершини A_1, A_2, B_1, B_2;
- a, b – довжини дійсних півосей;

c – довжина уявної півосі.

Зауваження 1. Рівняння гіперболоїда, направленого на вісь Oy :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$a, b, c \ > 0.$

Зауваження 2. Рівняння гіперболоїда, направленого на вісь Ox:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$a, b, c \ > 0.$

Зауваження 3. Якщо центр гіперболоїда знаходиться в точці $C(x_0; y_0; z_0)$, отримаємо загальне рівняння:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

$a, b, c \ > 0.$

§11. Еліптичний параболоїд.

Означення. ***Еліптичним параболоїдом*** називається поверхня, канонічне рівняння якої в прямокутній декартовій системі координат має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \tag{21}$$

$a, b \ > 0.$

З рівняння (21) випливає, що $z \geq 0$. Дослідження поверхні проведемо методом паралельних перерізів.

1) $O_{xy}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases} => \quad x = y = 0 \quad O(0;\ 0;\ 0)$ – вершина параболоїда

2) $O_{xz}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = z \\ y = 0 \end{cases}$ – парабола вітками на вісь O_z.

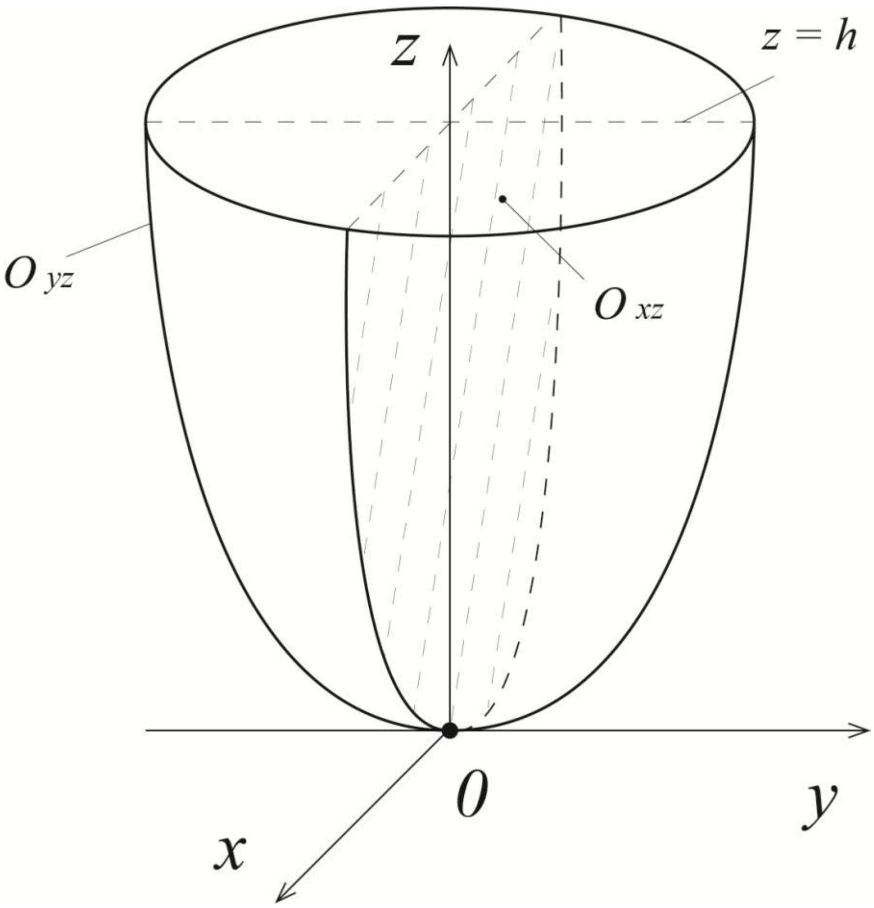
3) $O_{yz}: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = z \\ x = 0 \end{cases}$ – парабола вітками на вісь O_z.

4) $z = h$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h => \frac{x^2}{a^2 h} + \frac{y^2}{b^2 h} = 1, \tag{22}$$

(22) – сукупність еліпсів, де $a^2 h = a_1^2, \ \ b^2 h = b_1^2$.

Опишемо 4 випадок більш детально. При зростанні h півосі еліпсів $a_1 = \sqrt{h}a, \ \ b_1 = \sqrt{h}b$ збільшуються. Можна зробити висновок, що еліптичний параболоїд нескінченно зростаюча чаша, направлена вгору.



Зауваження 1. Рівняння параболоїда, направленого на вісь Oy :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = y,$$

$a, b\ > 0.$

Зауваження 2. Рівняння параболоїда, направленого на вісь Ox:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x,$$

$a, b > 0.$

Зауваження 3. Якщо центр параболоїда знаходиться в точці $C(x_0; y_0; z_0)$, отримаємо загальне рівняння:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0,$$

$a, b > 0.$

Зауваження 4. Якщо в рівнянні (21) покласти $a = b$, отримаємо круговий параболоїд: $x^2 + y^2 = a^2 z$.

§12. Гіперболічний параболоїд (сідло)

Означення. ***Гіперболічним параболоїдом*** називається поверхня, канонічне рівняння якої в прямокутній декартовій системі координат має вигляд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \tag{23}$$

$p > 0, q > 0$ - параметри гіперболічного параболоїда.

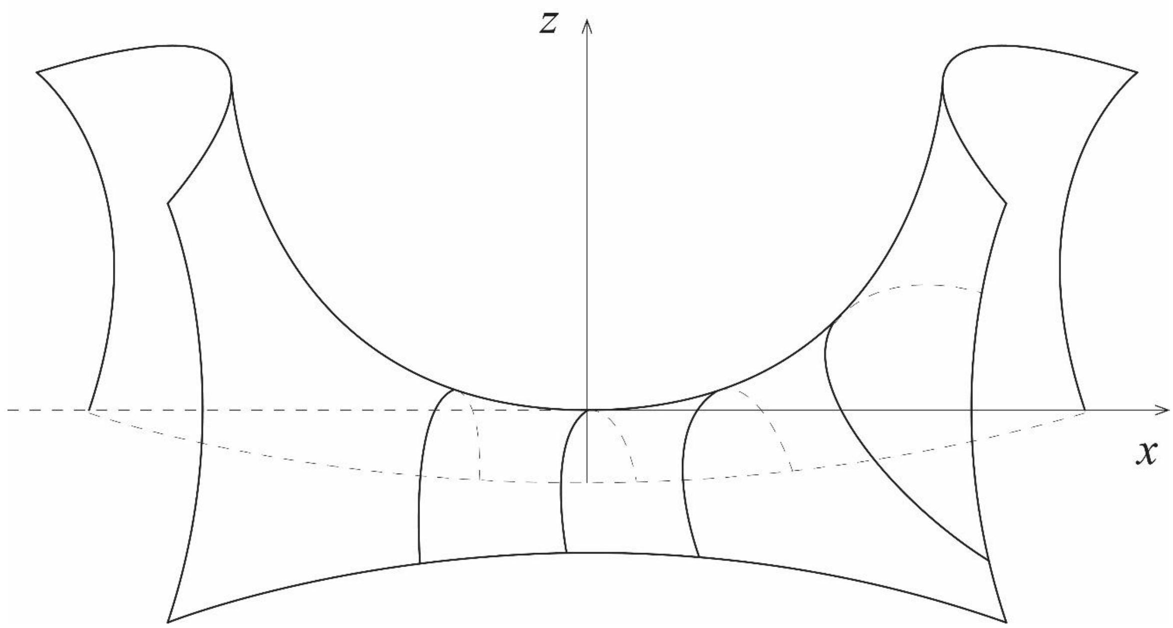
Дослідження поверхні проведемо методом паралельних перерізів.

1) $O_{xz}: \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ – парабола вітки напрямлені вверх, O_z - вісь симетрії,

2) $O_{yz}: \begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases}$ – парабола вітками вниз на вісь O_z, O_z - вісь симетрії,

3) $O_{xy}: \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ – пара прямих, що проходять через початкові координати.

При перетині гіперболічного параболоїда площинами $z = \pm h$ $(h \neq 0)$ лінією



перетину буде гіпербола. Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Цю поверхню можна утворити рухом параболи $y^2 = -2qz$ вздовж параболи $x^2 = 2pz, p > 0, q > 0$.

Зауваження 1. **З**агальне рівняння гіперболічного параболоїда:

$$\frac{(x-x_0)^2}{p}+\frac{(y-y_0)^2}{q}=2(z-z_0),$$

$p\ >\ 0, q\ >\ 0.$

Зауваження 2. Рівняння гіперболічного параболоїда, направленого на вісь Oy :

$$\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{r}=2y, p\ >\ 0, q\ >\ 0.$$

Зауваження 3. Рівняння гіперболічного параболоїда, направленого на вісь Ox:

$$\frac{y^2}{q}-\frac{z^2}{r}=2x,$$

$p\ >\ 0, q\ >\ 0.$

§13. Конус.

Означення. ***Конусом*** називається поверхня, канонічне рівняння якої в прямокутній декартовій системі координат має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{24}$$

Дослідження поверхні проведемо методом паралельних перерізів.

1) $O_{xy}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \\ z=0. \end{cases}$

   Лише один розв'язок $O(0;\ 0;\ 0)$ - вершина конуса.

2) $O_{xz}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \\ y=0 \end{cases} => \frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2},$

   $cx=\pm az$ - пара прямих, що перетинаються в початку координат, які є *твірними конуса*.

3) $O_{yz}: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \\ x=0 \end{cases}$

$cy = \pm bz$ - пара прямих, що перетинаються в початку координат, які є *твірними конуса*.

4) $z = h$

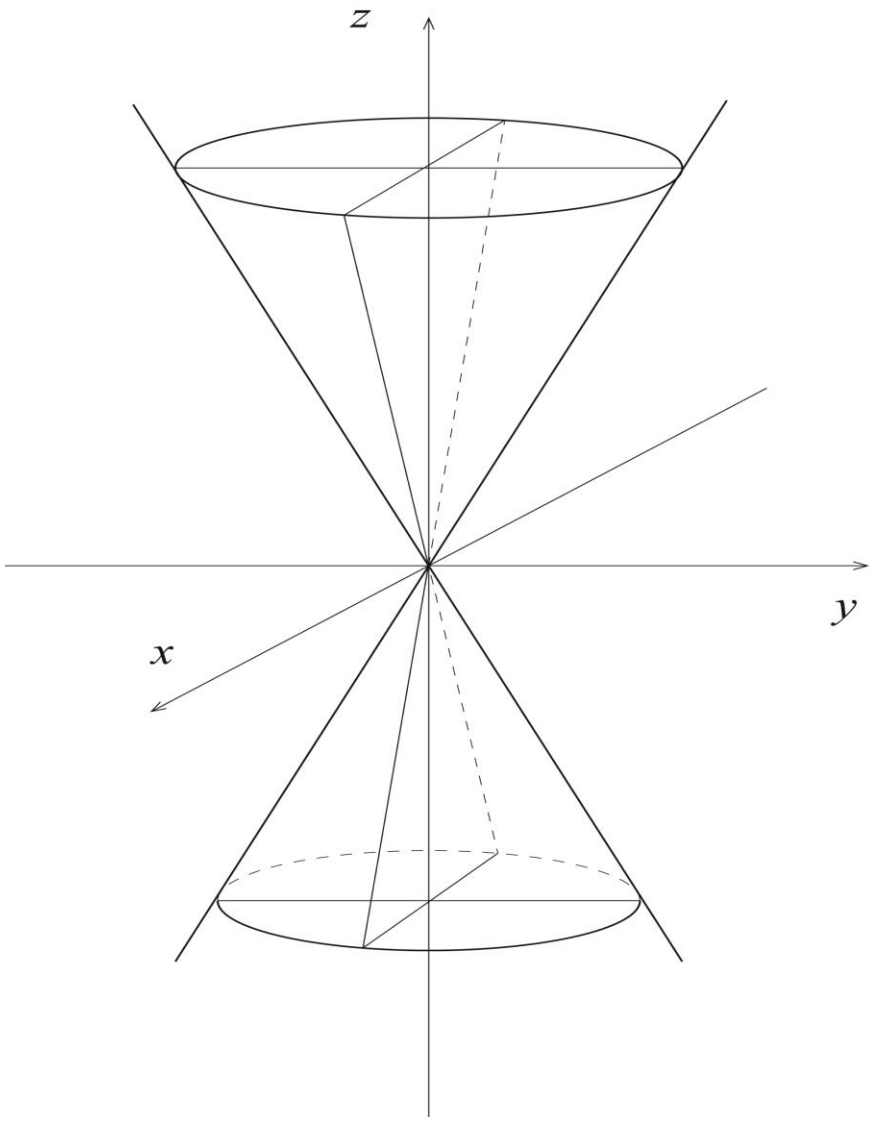
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} => \frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2} = 1,$$

Отже,

$\frac{x^2}{(a_1)^2} + \frac{y^2}{(b_1)^2} = 1$ - сукупність еліпсів у площині $z = h$ з півосями: $a_1 = \frac{ah}{c}, b_1 = \frac{bh}{c}$. Такі криві називаються *напрямними* еліпса.

При зростанні h еліпси необмежено зростають (збільшуються півосі). Отримуємо необмежено зростаючий конус.

- a, b, c – параметри конуса,
- якщо $a = b$, то конус *круговий.*



Зауваження 1. **З**агальне рівняння конуса:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0.$$

Зауваження 2. Рівняння гіперболічного параболоїда, направленого на вісь Oy :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Зауваження 3. Рівняння гіперболічного параболоїда, направленого на вісь Ox:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0.$$

Перелік питань, що виносяться на диференційований залік \ екзамен

1. Визначники другого і третього порядку, їх властивості(з доведенням).
2. Матриці. Лінійні операції над матрицями. Основні властивості цих операцій.
3. Обернена матриця. Необх. і достат. умова існування оберненої матриці(з довед.). Властивості оберненої матриці.
4. Ранг матриці. Елементарні перетворення матриць. Теорема Кронекера-Капеллі.
5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: основні поняття. Розв'язування СЛАР за формулами Крамера (з виведенням формул).
6. Матричний метод розв'язування СЛАР.
7. Метод Гаусса розв'язування СЛАР.
8. Знаходження розв'язків системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь.
9. Вектори (означення вектора, його орта, колінеарність та рівність векторів, компланарність векторів). Лінійні операції над векторами
10. Проекція вектора на вісь. Властивості проекції.
11. Лінійна залежність та незалежність векторів: основні твердження. Базис системи векторів.
12. Декартова прямокутна система координат. Розклад вектора по ортам координатних осей.
13. Направляючі косинуси вектора. Дії над векторами, що задані координатами в базисі.
14. Поділ відрізка в заданому відношенні.
15. Полярна система координат та її зв'язок з декартовою.
16. Означення скалярного добутку векторів. Алгебраїчні та геометричні властивості СД (з доведенням).
17. Геометричний та механічний зміст скалярного добутку. Координатна форма запису скалярного добутку.
18. Означення векторного добутку векторів. Алгебраїчні та геометричні властивості ВД (з доведенням).
19. Геометричний та механічний зміст векторного добутку. Координатна форма запису векторного добутку.
20. Означення мішаного добутку векторів. Алгебраїчні та геометричні властивості МД (з доведенням).
21. Геометричний зміст векторного добутку. Координатна форма запису мішаного добутку.
22. Різні види рівняння прямої на площині (з виведенням рівнянь).

23. Нормальне рівняння прямої. Відхилення точки від прямої.
24. Вивести рівняння площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору та загальне рівняння площини.
25. Вивести рівняння площини, що проходить через три точки. Записати рівняння площини у відрізках на осях та нормальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального.
26. Вивести векторне, канонічне(дослідити) і параметричне рівняння прямої в просторі. Записати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки та загальне рівняння прямої в просторі. Перехід від загального до канонічного рівняння прямої.
27. Кут між площинами. Кут між прямими на площині. Умови паралельності і перпендикулярності площин та прямих на площині.
28. Кут між прямими в просторі. Кут між прямою та площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої у просторі і площини.
29. Відстань від точки до площини та від точки до прямої в просторі. Відстань між мимобіжними прямими.
30. Криві другого порядку та їх характеристики.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник- К.: А.С.К., 1993, 2001.
2. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2002. – 288 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа., - М. Наука, 1969, 1985.
4. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник; За редакцією В.П. Дубовика, І.І. Юрика. - К., А.СК. 2001.
5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М. Наука, 1969, 1985.
6. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П., - М. Наука, 1981, 1986.
7. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Специальные разделы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П., -М. Наука, 1981, 1986.
8. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М., Наука, 1976.
9. Ильин В.А., Позняк З.Г. Линейная алгебра. - М., Наука, 1978.
10. Ильин В.А., Позняк З.Г. Аналитическая геометрия. - М., Наука, 1971.
11. Бугров Я.С., Никольский СМ. Дифференциальное и интегральное исчисление. -М. Наука, 1981.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Том I. -М. Наука, 1972, 1978.
13. Ильин В.А., Позняк З.Г. Основы математического анализа. Том I.-М., Наука, 1971, 1973, 1979.
14. И. А. Каплан. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967-1972.

ЗМІСТ